



TITLE:

アーノルド拡散の動力学(修士論文 (2002年度))

AUTHOR(S):

本條, 晴一郎

CITATION:

本條, 晴一郎. アーノルド拡散の動力学(修士論文(2002年度)). 物性研究
2004, 81(6): 904-958

ISSUE DATE:

2004-03-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/97761>

RIGHT:

修士論文 (2002年度)

アーノルド拡散の動力学

東京大学総合文化研究科 本條晴一郎 *

目次

1	序論	905
1.1	ハミルトン力学系における動機	905
1.2	本論文の構成	907
2	モデル	907
2.1	Froeschlé Map	907
2.2	素子の性質: Standard Map	908
2.3	回転数	908
3	アーノルドウェブの可視化	910
3.1	導入	910
3.2	局所回転数	910
3.3	周波数空間での表示	911
3.4	周波数空間での分布	912
3.5	パラメータ依存性	916
3.6	まとめと議論	918
4	共鳴線の滞在時間分布	922
4.1	導入	922
4.2	手法	922
4.3	滞在時間分布の共鳴次数依存性	922
4.4	滞在時間分布の素子の非線形強度依存性	923
4.5	滞在時間分布の結合強度依存性	924
4.6	測定のまとめ	924
4.7	ブラウン運動によるべきの導出	926
4.8	同一共鳴線上での滞在時間分布の違い	927
4.9	まとめと議論	928
5	遷移の動力学	930
5.1	導入	930
5.2	周波数空間の領域分け	930
5.3	遷移ダイアグラム	931
5.4	遷移確率ごとの遷移ダイアグラム: ハブ描像	933
5.5	効率的な遷移	935

*e-mail: honjo@complex.c.u-tokyo.ac.jp

5.6	ハブ同士の融合	940
5.7	速い遷移は実現されるか	941
5.8	まとめと議論	943
6	大域的拡散	944
6.1	導入	944
6.2	拡散係数の収束の様子	944
6.3	拡散係数の結合強度依存性	945
6.4	拡散の異方性	946
6.5	拡散係数のべき的振舞いはどのように説明されるか	949
6.6	まとめと議論	951
7	まとめ、議論、展望、課題	951
7.1	まとめ	951
7.2	議論	952
7.3	大自由度系への展望	952
7.4	散逸系への展望	954
7.5	量子系への展望	954
7.6	今後の課題	955

1 序論

1.1 ハミルトン力学系における動機

1.1.1 大自由度系の緩和

平衡統計力学を力学から基礎付けようとする文脈では、大自由度の孤立保存系は十分長い時間が経つと、巨視的に見て一つの熱平衡状態に緩和すると信じられている。この機構を調べるため、多自由度のハミルトン力学系の拡散¹の性質が調べられている。この点に関して、数値実験や摂動論によって拡散係数が計算されたり、そのパラメータ依存性の研究がなされたりし、一定の理解は進んでいる [KK89, KK90, CV93, CV97, WLL94, LA98]。

しかし、現在のところわれわれは、系を大自由度系として扱って良い条件というものを知見として持っていない。数理的に厳密には熱力学極限で大自由度ということになるのかも知れない。しかし、現実的には「十分大きな自由度」を持てばいいはずである。「十分な大きさ」とはどれぐらいなのか、そして「十分な大きさ」には他に付随する条件が必要なのかどうかは問われてしるべきである。

大自由度系としての十分条件を求めるためには、拡散の機構の詳細を知らなければならない。つまり状態がどのように緩和するかを明らかにしなければならないということである。

多自由度系の緩和の機構の研究として、従来の理論的取扱いで良く知られているのは、近可積分系の安定性問題である。不安定性を導き出す運動は、共鳴に沿った運動であるアーノルド拡散 [Arn64, Chi79] であり、ハミルトニアンに対して課された様々な条件に対しての拡散係数の上限値が厳密に証明されている [Nek77, Loc90, LN92]。しかし、一般に熱力学的な振る舞いが期待できる系は、近可積分系よりも摂動が大きな系であり、これらの導出の前提になっている条件を満たしてはいない。

¹ハミルトン力学系では通常、拡散は実空間での拡散ではなく、運動量 (あるいは作用) の拡散を意味する。

われわれが知りたいのは巨視的には統計的な振舞いが期待できるような、より摂動が大きい場合の拡散である。ところが、このようなパラメータ領域での拡散に対しても、理論的扱いは近可積分系のその延長であり、その拡散係数は共鳴に沿ったアーノルド拡散とその加速によって説明されている [CV93, CV97, WLL90, WLL94, LA98, CL99]。これらの説明によると、運動はあくまでも共鳴に沿ったアーノルド拡散によって律速されていると仮定されている。そしてアーノルド拡散自体が、自由度が大きく摂動項が大きい場合に、多くの共鳴していない周波数モードからモジュレーションをかけられ、加速されるという扱いになっている。

しかし、巨視的には統計的な振舞いが期待できるようなパラメータ領域で、そのような近可積分系の延長上にある議論がどこまで有効であるかは明らかではない。自由度が大きく、摂動項が大きい場合は、異なった共鳴条件を満たす共鳴領域同士が重なり合うことにより、共鳴線に横断的な運動が可能になることが想像できる。そのような状況下では、アーノルド拡散が全系の拡散を律速するかどうかは自明ではなく、どのような運動が相空間で起きているかを調べる必要がある。そして、近可積分的取扱いはどの程度有効か、どのようにして破綻していくかは、当然問われるべき問題である。共鳴の構造が自由度や摂動項に依存してどのように変化していくか、そこを押えてこそ、大自由度系の緩和の機構にアプローチできると思われる。

1.1.2 力学の担う機能

一方、力学はいかにして機能を担うかを理解しようという視点でも、ハミルトン力学系をモデルとして、その性質が調べられている。化学反応のダイナミクスを力学系の視点から捉え直そうという研究は、典型的にこの視点がとられているように思われる [Dav85, DG86, MDE87, GE91, Tod95, Tod00, Tod02]。

機能を動力的な見地から特徴付けようという試みは、輸送の研究に置き換えられる。ハミルトン力学系における輸送の研究の基本的処方、作用関数から流束が極小になる面²を決定し、その面を通過する流束から輸送量を求めるということである [MMP84, BK84]。

流束が極小になる面は、トーラスが崩壊した後のカントールセット状の不変集合、カントーラスの位置と対応しており、相空間の構造物が輸送の障壁となっていることがわかる。

多自由度系の研究は、流束が極小になる面を特定するのが困難であり、目覚しい発展は見せていない。しかし、面を特定する以前に、多自由度系で輸送を考える場合、最初に考慮すべきなのが相空間の構造物による障壁であるかどうかの妥当なことである確証はない。

相空間の構造物が重要だという前提は、低自由度系の相図から得られるような、系は「規則的な運動をする構造物+非線形共鳴によって生じた不安定なカオス領域」である、という描像に多くを負っている。多自由度系で共鳴領域が縦横無尽に走っているとき、相空間の構造物を探するという手法が有効であるという保証はない。例えば、自由度が増していくと、相空間における KAM トーラスの占める割合は急速に減少するとの報告がある [Kon89]。

そのような状況では、まず多自由度系の共鳴構造と輸送の関係を調べるということこそ重要である。そこを押えてこそ、系がいかに動力学を使って振舞い、機能を発現するのがわかるのであろう。

1.1.3 アーノルド拡散とは

多自由度系の相空間における共鳴の構造を調べるときにもっとも基本的なことは、アーノルド拡散を調べることにいってよい。

しかし、アーノルド拡散は妥当な定義が共通語となっているとはいいがたく、人によってまち

²化学反応の研究の文脈ではボトルネックと呼ばれる。

まちのものを指してしまっている。そこで、本研究では何をアーノルド拡散と呼んでいるのかを以下に示しておく。

自由度 N のハミルトン力学系を考える。低自由度系 (自励系なら $N = 2$ 、非自励系なら $N = 1$) では N 次元トーラスが存在すると、相空間は部分空間に分割され、大域的な運動は不可能である。しかし、多自由度系 (自励系なら $N \geq 3$ 、非自励系なら $N \geq 2$) では、 N 次元トーラスは相空間を分割することができず、全てのストカスティック領域はトポロジカルにつながっている。このときの「トーラスによって妨げられない多自由度系特有の大域的な運動のことをアーノルド拡散と呼ぶ」という言い方が一番おおらかな言い方である。

しかし、これでは指し示す対象となる運動がはっきりしておらず、意味のある定義がなされたとは到底言いがたい。

低自由度系では起こらず、多自由度系で普遍的に起こる現象は、共鳴線に沿った運動である。この共鳴線に沿った運動をアーノルド拡散とするのが妥当な定義である。そこで、本研究ではトーラスの存在の有無を問わず³、共鳴線に沿った運動のことをアーノルド拡散と呼ぶ。

それでも、本研究のターゲットは、共鳴線に沿った運動そのものを調べるだけでなく、どのような時に共鳴線に沿った運動が実現されるか、いかにして共鳴線に沿った運動が失われていくか、また、それらの運動はどのような性質をもっているかを調べることを含んでいる。本研究の目的は、多自由度系で普遍的な共鳴線に沿った運動が、他の種類の運動とどう絡み、どのような寄与をするのかを調べるということである⁴。

アーノルド拡散を導き出すような共鳴線のネットワーク構造と、低次元系でも見られるような、パラメータの変化によって共鳴線が太くなって複数の共鳴領域が重なり合うこと、これらがどのように絡み合い動力学の性質を変えるのかが本研究の主な焦点である。

1.2 本論文の構成

第2節で本研究で用いるモデルを導入し、付随する一般的事項を説明する。第3節でアーノルド拡散の舞台となる共鳴線を時系列から可視化して構造を調べる。第4節で共鳴線の滞在時間分布について議論し、第5節で共鳴の構造が輸送にどのように影響するかを模索する。第6節で大域的な拡散と共鳴の構造の関係を議論する。第7節でまとめをした上、今後の課題を述べる。

2 モデル

2.1 Froeschlé Map

本研究でモデルとして用いる Froeschlé Map⁵[Fro71, Fro72, Fro73, KB85] は

$$\begin{cases} p_i(n+1) = p_i(n) + K \sin(q_i(n)) + b \sin(\sum_{k=1}^2 q_k(n)) \\ q_i(n+1) = q_i(n) + p_i(n+1) \end{cases} \pmod{2\pi} \quad (1)$$

で表される。ただし、 $i = 1, 2$ で、各自由度のインデックスを表す。以後、両方の自由度をまとめて論じるときは、インデックスとして i を用い、上記のように p_i などとする。 K は各自由度の非線形性を支配するパラメータで、 b は自由度間の結合の強さを支配するパラメータである⁶。

³トーラスの存在を確かめるのは困難であるし、相空間の構造物に注目するというのはもともとの動機に矛盾する。

⁴Chirikov らは、そのような研究の重要性を指摘しているが、そこでもアーノルド拡散そのものの機構を切り出して理解しようと試みている [CV97]。

⁵この写像の性質を最初に詳しく調べた Froeschlé の名前を冠して呼ばれることが多いが、もともとは 1965 年に Arnold が Hénon に提案したものであるようだ [Fro71]。

⁶本当はこの言い方は正しくなく、 b の値によっても非線形性は変化する。

この系は撃力を受けた二つの振り子が素子として、撃力で結合しているものである。そのことは、Froeschlé Map をハミルトニアン

$$H = \sum_{i=1}^2 \frac{p_i^2}{2} + \left\{ \sum_{i=1}^2 K \cos(q_i) + b \cos\left(\sum_{i=1}^2 q_i(n)\right) \right\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \quad (2)$$

で表示するとよくわかる。結合項 $b \sin(q_1 + q_2)$ から、各々の振り子が他方の系の角周波数 ω_j (j は結合している相手を表すインデックス) から、 $-\omega_j$ のモジュレーションを受けているのがわかる。

Froeschlé Map は自由度3の自励ハミルトン力学系のポアンカレ断面と見なせ、アーノルド拡散を起こす条件を満たしている。

また、Froeschlé Map は、良く知られた Standard Map[Chi79] を素子として2個結合した系と見なすことができる。

2.2 素子の性質：Standard Map

Standard Map[Chi79] は

$$\begin{cases} p(n+1) = p(n) + K \sin(q(n)) \\ q(n+1) = q(n) + p(n+1) \end{cases} \pmod{2\pi} \quad (3)$$

で与えられる写像である。 K は非線形性を支配するパラメータである。この系は周期的な撃力を受けた振り子を表している。

$K = 0$ の時、系は完全可積分となり、 p - q は作用-角変数となっている。そのときの角周波数 ω は $\omega = p$ である。 $K > 0$ で周期的な撃力との間で共鳴し、相空間中にカオス領域が出現する。 K を増加させていくと、相空間で高次の共鳴領域が占める体積が増加し、また、それぞれの共鳴領域が重なっていくことでカオス領域が増加していく。Standard Map の相図をいくつかのパラメータについて図1に示す。それぞれ初期値を $q(0) \in [0:2\pi)$ 、 $p(0) \in [-\pi:\pi)$ の区間でランダムにとった128個のサンプルを128ステップにわたってプロットしてある。 $K \simeq 0.9716$ で最終KAM トーラスが崩壊して p 方向に大域的な拡散が可能になることが知られている [Gre79]。

2.3 回転数

2.3.1 Standard Map の場合

回転数を、まず Standard Map を例として定義する。

回転数は \tilde{q} を 2π で剰余をとらない場合の q として

$$\rho \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tilde{q}(T) - q(0)}{2\pi T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^T \frac{p(n)}{2\pi T} \quad (4)$$

で与えられる。回転数は単位時間で一回写像を実行する度に振り子が平均で何回転したかを表す量である。

Standard Map の共鳴条件は

$$m\omega + M\Omega = 0 \quad (5)$$

で与えられる。ただし、 m 、 M は任意の整数、 ω は p - q に対応する角周波数、 Ω は Standard Map をポアンカレ断面と見なした時の断面に横断的な運動の角周波数であり、写像一回で断面に戻ってくるので $\Omega = 2\pi$ である。

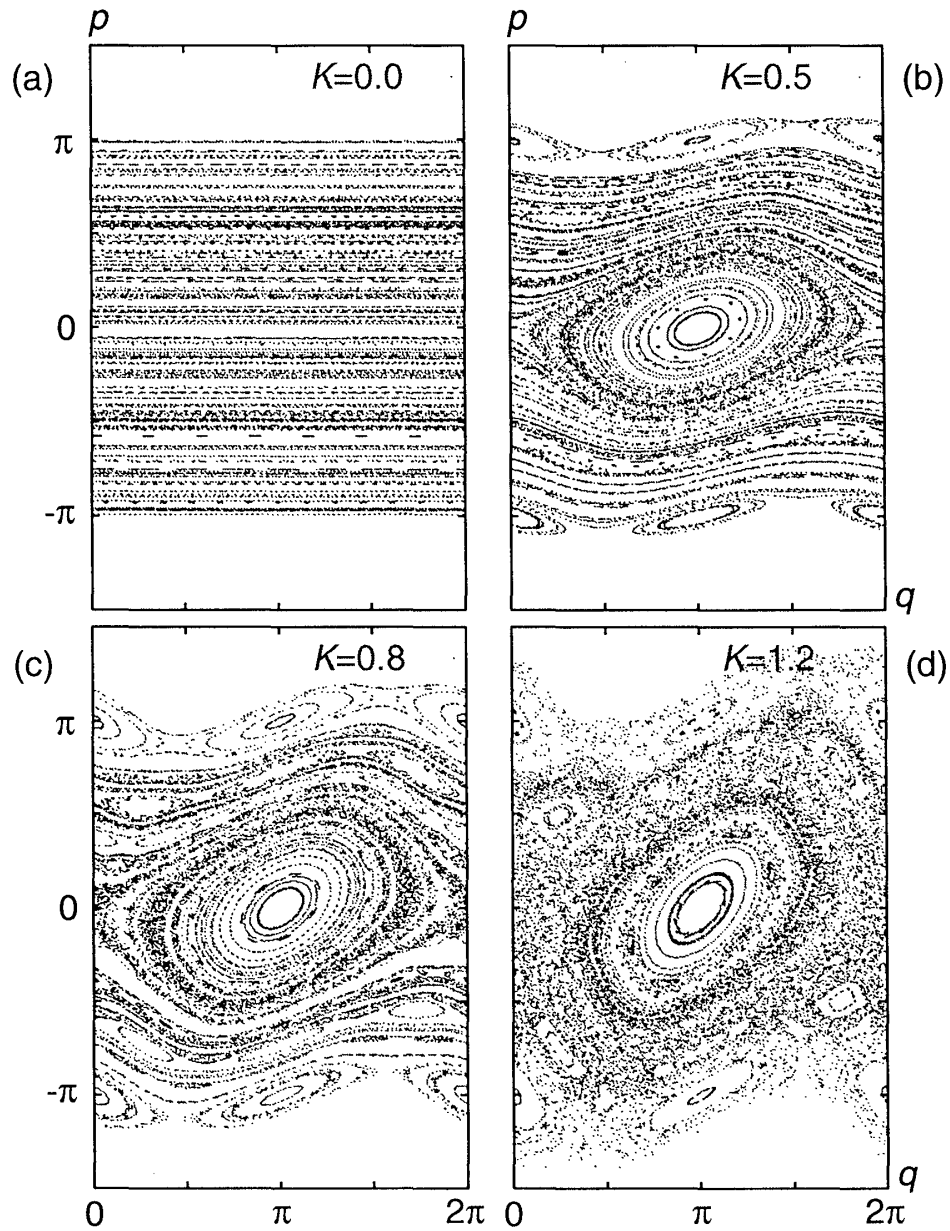


図 1: Standard Map の相空間。(a) : $K = 0.0$ 、(b) : $K = 0.5$ 、(c) : $K = 0.8$ 、(d) : $K = 1.2$ 。それぞれ 128 サンプル、128 ステップ。(a) のとき、系は完全可積分系であるが、非線形パラメータ K の増加と共にストカスティック領域が成長し、(d) に至っては最終 KAM トーラスも崩壊し、大域的な拡散が可能となっている。

定義より回転数は

$$\rho = \frac{\omega}{\Omega} \quad (6)$$

である。よって、回転数を使って書き直すと、共鳴条件は

$$m\rho + M = 0 \quad (7)$$

であり、 ρ が有理数の時に共鳴していることがわかる。

以下では、共鳴を論じるときは、簡便さのために角周波数よりもむしろ回転数を用い、主として見ための好みのため、特に断らない場合は回転数も ω で表すことにする。

2.3.2 Froeschlé Map の場合

以上の定義を Froeschlé Map に拡張するのは容易である。

Froeschlé Map の共鳴条件は

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + M = 0 \quad (8)$$

である。ただし、 m_1 、 m_2 、 M は任意の整数であり、 ω_1 、 ω_2 はそれぞれ p_1 - q_1 、 p_2 - q_2 に対応する回転数である。

アーノルド拡散を調べるためのモデルとして Froeschlé Map を用いるメリットは、部分系の Standard Map の性質が良く知られていることだけでなく、回転数が自然に定義できるため共鳴条件の扱いが容易であることが大きい。

3 アーノルドウェブの可視化

3.1 導入

多自由度系を扱うときの常として、相空間の可視化による直観的理解が困難ということがある。本章では共鳴線を相空間の半分の次元の周波数空間で表示することによって上記の困難を回避し、そこで得られた構造がパラメータに依存してどのように変わるかを観察する。

3.2 局所回転数

系がいかなる共鳴条件を満たす状態にあるかは、回転数の値からわかる。ならば、異なる共鳴状態間の遷移は有限の局所時間で定義された局所回転数の時間変化によって追えるのではないかと考えるのは自然である。

局所回転数は

$$\omega_i(jT) \equiv \sum_{n=jT}^{jT+T-1} \frac{p_i(n)}{2\pi T} \quad (9)$$

で定義される。 T は局所回転数が定義される局所時間の長さで、 $\lim_{T \rightarrow \infty} \omega_i(0)$ で通常の回転数が得られる。

局所回転数を測定する局所時間の長さは、回転数が統計平均として収束するには十分長く、異なる共鳴状態間の遷移の時間スケールに対しては十分短くとらなければならない。トーラス存在下の Standard Map の回転数の収束性と、Froeschlé Map での予備計算により、 $T = 1000$ とすると上の条件をよく満たすことがわかった。様々なパラメータを一貫して扱うには局所時間は統一しておくべきである。よって、本論文では今後、断らない限り $T = 1000$ とすることにす。ただし、 T の値を 500~10000 程度の範囲で変えても本研究の結果には影響しない。

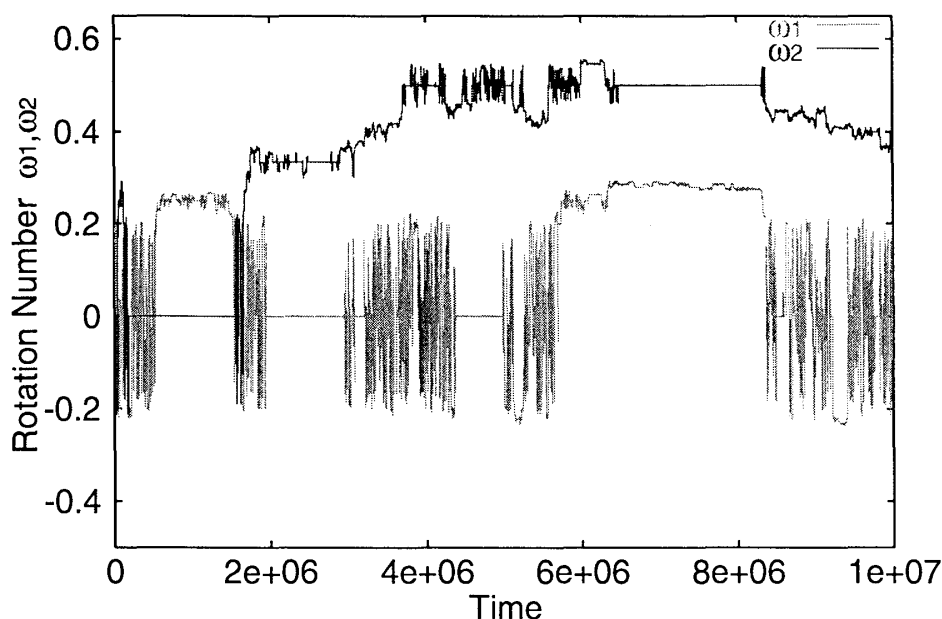


図 2: 局所回転数の時系列。素子の非線形パラメータ $K = 0.8$ 、結合強度 $b = 0.002$ 。 1×10^7 ステップ。一定の有理数をとったり、間欠的に遷移したりする。

3.3 周波数空間での表示

まず、局所回転数の時系列を図 2 に示す。ある有理数でしばらく一定値をとり、間欠的に変化しているのがわかる。つまり、局所回転数は系がとっている共鳴状態とその変化を追うのに有望である。

図 2 の局所回転数を、さらに長く 1×10^8 ステップまで計算し、周波数空間にプロットしたものが図 3 である。低次の有理数の値に明瞭な共鳴線が見てとれる。

多自由度のハミルトン力学系を解析するときには、相空間をある断面で切るということがしばしば行われる。しかし、多自由度系の動力学を直感的に理解しやすい 3 次元以下の空間で表現するためには、時系列を異なる断面で複数回切ることが必要になる。このような時、断面から得られる情報は極めて少なくなってしまう。なぜなら、一度断面で切って離散化した軌道を再び異なる断面で切る場合は、新たな断面が軌道の変域にあったとしても、断面にちょうど載る確率は低い。

ここで用いている局所回転数は所詮運動量 p_i の有限時間平均をとって 2π で割ったものである。ならば p_i そのものからは共鳴に関する情報は引き出せないだろうかとの疑問は自然にわいてくる。図 3 では局所回転数と合わせて運動量 p_1 および p_2 を局所時間 $T = 1000$ ごとにプロットしている。ただし、ファクター 2π 分だけ異なるスケールを合わせて表示している。これは 4 次元相空間を 2 次元の運動量空間に射影したものに当たる。運動量空間への射影からだけでは軌道の振舞いに関する情報がほとんど取り出せていないことがわかる。しかも、さらに時間発展をさせると、射影された軌道は平面を埋め尽くしていくため、より情報が取り出しにくくなっていく。つまり、局所回転数の方が共鳴に関する情報を得るのに有用であることが確認できる。

周波数空間で共鳴の構造を見ようというアイデア自体は新しいものではない。同様のことは Martens らによる Local frequency analysis [MDE87] や Laskar による Frequency map analysis [Las90, LFC92, Las93] で実行されている。これらは時系列を有限時間に区切って、その区間でフーリエ変換をし、最もパワーを持った周波数を、その区間の周波数としようというものである。

本研究で行った局所回転数による共鳴線の表示は、上記の手法を扱いやすいモデルを選んで単

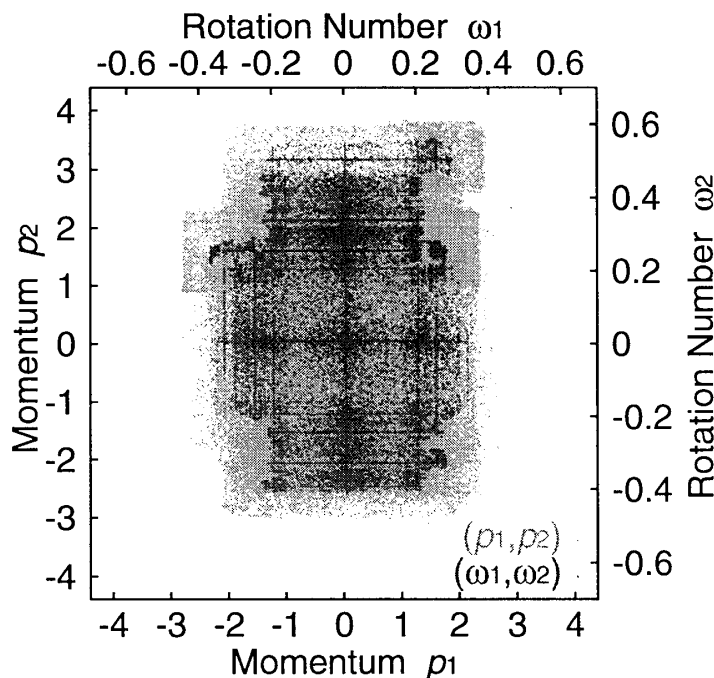


図 3: 周波数空間での運動の様子。4次元相空間の2次元運動量空間への射影に重ね書きしている。素子の非線形パラメータ $K = 0.8$ 、結合強度 $b = 0.002$ 。 $\omega_i = (\text{有理数})$ の共鳴線が観察される。局所周波数の値からいかなる共鳴条件を満たしているかが割り出せる。

純化したものと考えることができる。しかし、時系列をいちいちフーリエ変換するよりも圧倒的に簡便であるし、強力オス領域で時系列の細かい揺らぎが優勢になることによって基本周波数が意図せぬ高周波に不連続に飛んでしまうこともない。よって、周波数空間の大域的な性質やそのパラメータ依存性を、幅広く追求することが出来るのである。

3.4 周波数空間での分布

3.4.1 手法

3.3節では周波数空間に時系列を重ね書きして共鳴線を可視化した。しかし単なる重ね書きでは、周波数空間上での到達点しか判別できず、いかなる共鳴にどれぐらいの頻度で滞在するかについての情報は得られない。本節では局所回転数の時系列を周波数空間上で頻度分布を含めて表現することにより、動力学を考える上で重要な、時間を含んだ情報を得ることとする。

まず、写像の性質に合わせて、表示するときに ω_i に対して周期境界条件を課し、 $[0, 1)$ 区間に制限する。これは長時間の時間発展で局所回転数が大域的に拡散してしまい、決まった有限区間で表示できなくなることを防ぐためである。ただし、局所回転数を求めてから、その剰余をとる。先に運動量 p_i に周期境界を課してしまうと、式 (9) からは正しく局所回転数が求まらない。

周波数空間の詳細な情報をつかむために、長時間の時間発展をさせる。これは理想的には周波数空間全域での定常分布を獲得することを目指すものである。しかし、定常分布が得られたことを判断するのは困難であるし⁷、非線形パラメータが弱いときは運動が遅いので、現在の現実的

⁷ハミルトン力学系の軌道は相空間にいくらでも微細な構造を作ってしまうので、なんらかの粗視化をしない限りは定常分布が得られることはない。ここでは運動量のみを取り出して時間的に粗視化をしているが、得られた周波数空間での分布が、定常分布を与えるようなものであるかどうかは自明ではないし、不明である。

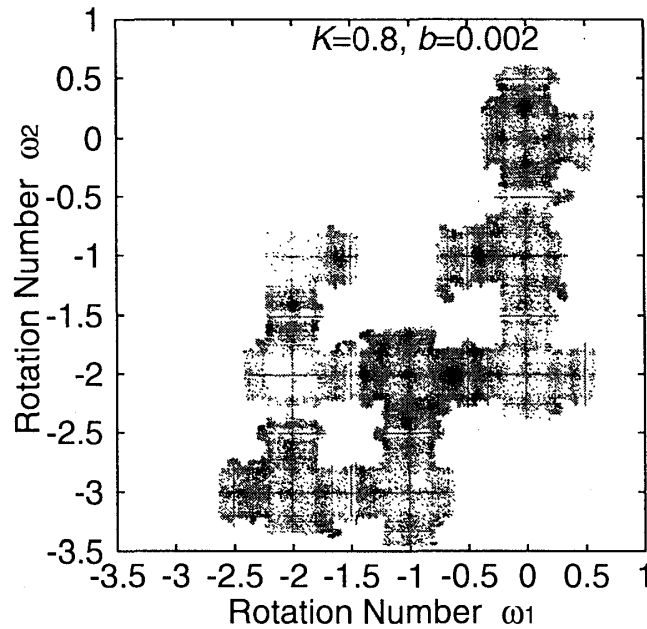


図 4: 局所回転数の時間発展。周期的なセルを飛び移りながら大域的に拡散していく。素子の非線形パラメータ $K = 0.8$ 、結合力 $b = 0.002$ 。 1×10^9 ステップ。5 点に 1 点をプロット。

な計算時間では明らかに定常分布が得られない。よって、定常分布を獲得するのはあきらめて、測定時間を固定する。また、運動の遅い領域に初期値を取っても、有限時間内に効率的に系の全体像をつかむことはできない。図 4 は周期的なセルを飛び移って大域的に拡散する様子である。この図を見てもわかるように、大域的な拡散に最も関わるのは、素子を振り子として見たときのセバトリクス周辺に形成されたストカスティック領域を使った運動である。そこで、初期値はこのストカスティック領域にとる。その上で、周波数空間で値を持たない領域に対しては「ここは到達しにくい」という情報が取り出せたとき開きなおることとする。

滞在頻度は $[0, 1) \times [0, 1)$ の区間を 512×512 個のビンに切って数を数え、グレースケールで表示する。

3.4.2 共鳴線のウェブ構造が認められる場合

素子の非線形パラメータ $K = 0.9$ 、結合強度 $b = 0.002$ に対して、以上の手続きで得たのが図 5(a) である。共鳴線の網の目、アーノルドウェブが可視化できている。このパラメータは最終 KAM トーラスが破れていない Standard Map を素子として、素子の性質が大きく変わらない程度の強さ⁸で結合したものに当たる⁹。結合していない場合の素子の相空間の様子は図 1(c) とほぼ同様と考えてよい。

図 5 を観察すると、 ω_i が $1/5$ から $4/5$ の領域にわたって $\omega_i = (\text{有理数})$ 、つまり $m_i \omega_i + M = 0$ の共鳴線が明瞭に見える。つまり、軌道は多くの時間 $\omega_i = (\text{有理数})$ の共鳴状態にあるということである。 ω_i が $1/5$ 以下、または $4/5$ 以上の領域で、 $\omega_i = (\text{有理数})$ の共鳴線が観察されないのは素子である Standard Map が、その値の共鳴領域を十分に持っていないこととコンシステント

⁸この強さは、従来の数値実験で「弱い」とされている値 [KB85, WLL90, WLL94, LA98] よりもさらに弱い。しかし、強い、弱い、というのは比較による程度問題ではなく、系の詳細がどのように変化するかを考慮してはじめて言えることである。どのような場合に結合が弱い、と言えるかについては後で触れる。

⁹だからといって結合したものが最終 KAM トーラスを保持しているとは限らないが、ここではそれには触れない。

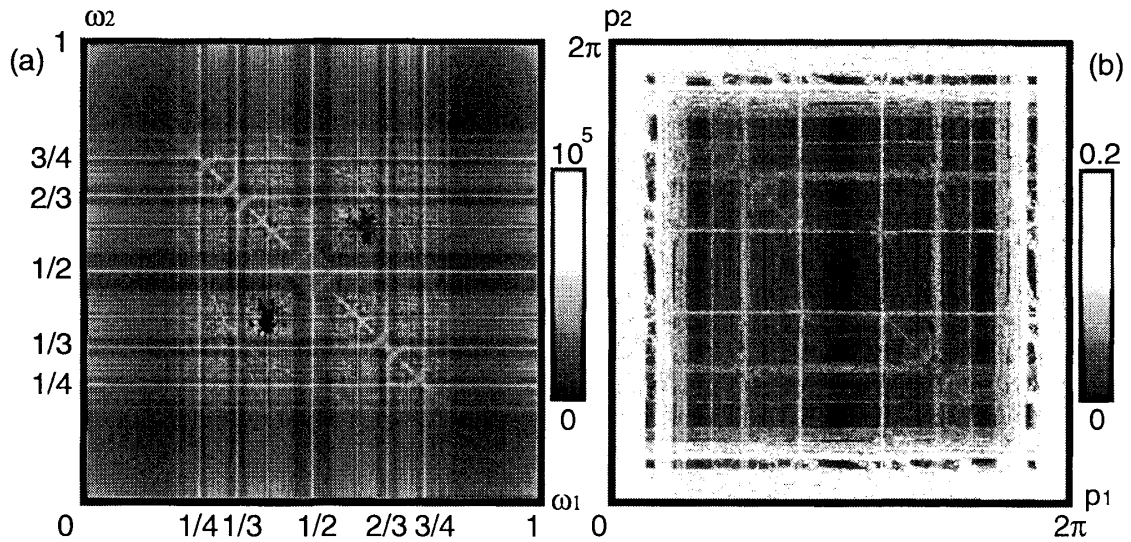


図 5: 素子の非線形パラメータ $K = 0.90$ 、結合強度 $b = 0.002$ 。(a): 周波数空間での頻度分布。 1×10^{10} ステップ。様々な次数の $m_i \omega_i + M = 0$ の共鳴線が格子状に見える。また、 $\omega_1 + \omega_2 = 0$ の共鳴線が明瞭に見られることから、結合項 $b \sin(q_1 + q_2)$ によって系が異方性を持っていることがわかる。(b): 相空間の断面上の不安定領域の分布。相空間の断面上に初期値を用意し、時間発展をさせることによって得られた局所リアプノフ指数を初期値に対してプロットしてある。断面は $q_1 = q_2 = 0$ 。局所時間 256 ステップ。不安定領域は格子状に分布しており、共鳴に沿って存在していることがわかる。

である。それは、少々パラメータが違うが、図 1(c) を見ればよくわかる。

目を引くのは $\omega_1 + \omega_2 = 0$ の共鳴線である。これは結合項 $b \sin(q_1 + q_2)$ に直接由来する共鳴である。このことは結合項を $b \sin(q_1 + q_2)$ ではなく $b \sin(q_1 - q_2)$ とすると、逆に $\omega_1 - \omega_2 = 0$ に明瞭な共鳴線が現われ、周波数空間全体としても図 5(a) を左右反転させたものが得られることで確認される。

また、図 5(a) では $2\omega_1 + \omega_2 = 0$ と $\omega_1 + 2\omega_2 = 0$ は $2\omega_1 - \omega_2 = 0$ と $\omega_1 - 2\omega_2 = 0$ に比べ、より多くの分布を持っているのが見られる。このことから、結合項の影響は、より高次の共鳴にもおよんでいることがわかる。

当然のことながら、結合の強さが $b = 0$ であるとき、素子に KAM トーラスが残っているなら、周波数空間で状態は一点、もしくは限られた小さな領域に留まる。結合の強さ b を大きくしていくと、 $m_i \omega_i + M = 0$ の共鳴線に沿った運動が可能になり、周波数空間に格子状の分布ができる。しかし、 $b = 0.002$ 程度の結合力のときですら、結合の仕方に依存した $\omega_1 + \omega_2 = 0$ の共鳴線の分布は低次の $m_i \omega_i + M = 0$ の共鳴線と同じ程度の頻度の分布を持つことから、結合に由来する異方性が動力学に重要な寄与をすることが示唆される。

$\omega_1 + \omega_2 = 0$ の共鳴線に比較して、結合項から大きな寄与を受けていない $\omega_1 - \omega_2 = 0$ の共鳴線に注目すると、両素子の局所回転数が有理数から最も遠い値である黄金比、 $\omega_i = (\sqrt{5} - 1)/2 \simeq 0.618$ をとるところに空白が出来ているのがわかる。黄金比は Standard Map の最終 KAM トーラスの存在するところであり、このパラメータの Froeschlé Map に KAM トーラスが残っているかどうかはさて置いても、相空間の到達しにくい領域に関しては、素子である Standard Map の性質が保持されていることがわかる。

次に、相空間の断面上の不安定領域の分布を求め [KK92, KK94, FGL00]、周波数空間での頻

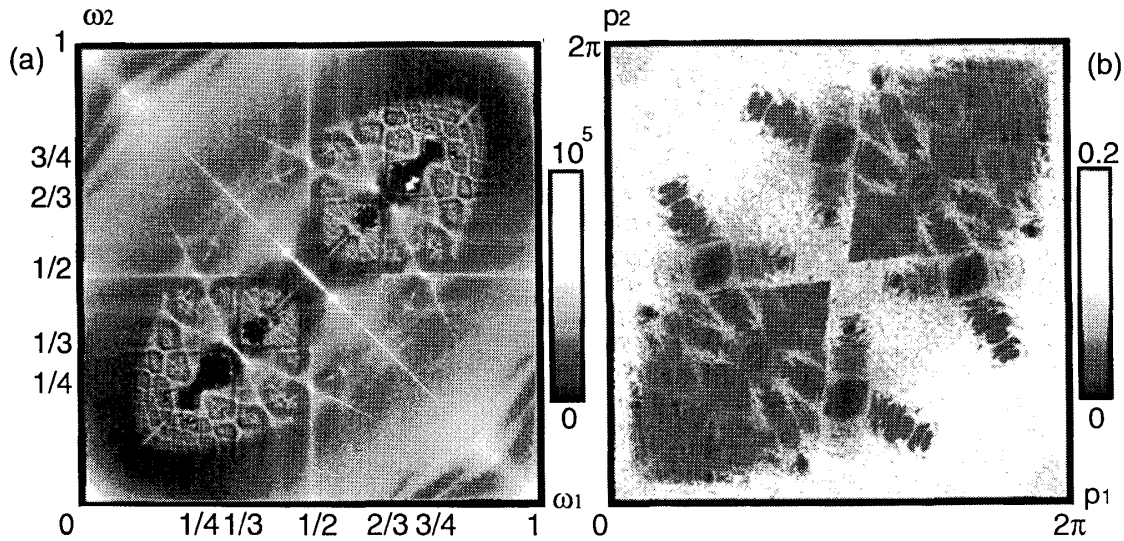


図 6: 素子の非線形パラメータ $K = 0.5$ 、結合強度 $b = 0.100$ 。(a) 周波数空間での頻度分布。 1×10^{10} ステップ。結合方向に走った共鳴線が支配的になっている。また、結合方向の共鳴線の周りでは線上に大きな分布をもつのではなく分布がぼやけて広がっており、ぼやけた領域は結合方向の共鳴線に横断的な方向につながっている。(b) 相空間の断面上の不安定領域の分布。断面は $q_1 = q_2 = 0$ 。局所時間 256 ステップ。 $\omega_1 + \omega_2 = 0$ の共鳴領域が成長して他の共鳴領域と重なり、大きな共鳴領域を形成しているのがわかる。その領域は、(a) の分布がぼやけた領域と対応している。 $2\omega_1 + \omega_2 = 0$ や $\omega_1 + 2\omega_2 = 0$ という高次の共鳴領域でも同じ傾向が見られる。

度分布と比較してみる。高次元相空間の軌道を複数の断面で切るのは得策でないことは、先に述べた通りである。しかし、前もって断面上に軌道を用意し、その性質を議論するのはこの限りではない。不安定領域の分布は、相空間の断面上に用意した一群の初期値を、それぞれ時間発展させることによって局所リアプノフ指数を計算し、それらの値を初期値に対してプロットすることによって求められる。

そうすることによって、図 5(a) と同じパラメータ $K = 0.90$ 、 $b = 0.002$ に対して得られた不安定領域の分布が図 5(b) である。これらの図では共鳴領域が不安定領域として表示されている。しかし、表示された結果は断面の選び方への依存性が大きい。また、表示された共鳴領域がどのような共鳴条件を満たしているのかが自明でないため、共鳴線を捉えることに関しては周波数空間での表示と相補的に用いられて力を発揮するものである。

断面上の不安定領域を表示した図 5(b) では、周波数空間の頻度分布図 5(a) に比べると、結合の仕方に依存した $\omega_1 + \omega_2 = 0$ の共鳴線や高次の共鳴線に対応する共鳴領域を捉えきれていないことがわかる。周波数空間の頻度分布を求めるときはビンを切ってそこに入るすべての状態をカウントしている。それに対して、断面上で不安定領域を表示するときは、格子上に初期値を置くので、最初から有限精度でとびとびの値に対してしか情報を得られない。

3.4.3 共鳴線が崩壊している場合

次に、図 5(a) と同様の手続きで求められた図 6(a) を観察する。素子の非線形パラメータは $K = 0.5$ 、結合強度は $b = 0.100$ であり、これは図 1(b) の Standard Map を強く結合したものにあたる。

$K = 0.9$, $b = 0.002$ の時の周波数空間、図 5(a) との違いは顕著である。まず、図 5(a) と違い、共鳴線は縦横に規則的な格子を形成してはいない。観察される共鳴線の多くは $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + M = 0$ (ただし、ここでは $m_1, m_2 > 0$) であり、結合方向に共鳴線が走っているのがわかる。また、 $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + M = 0$ を満たす共鳴の周りでは分布が線状ではなく、ぼやけて広がっていて、特定の共鳴条件を満たす共鳴領域に長時間 (局所回転数を求めている有限時間以上) 滞在することができなくなっているのが見てとれる。この傾向は $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + M = 0$ を満たす共鳴の内、低次の共鳴の周りで顕著である。また、分布が線状ではなく、ぼやけて広がっている領域は、 $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + M = 0$ を満たす共鳴に横断的な方向につながっていることが観察される。

分布が線状に大きな値を持つのではなく、ぼやけて広がっている場合、相空間では何が起きているのだろうか。そのことを知るためには、やはり相空間で不安定領域がどのように分布しているかを調べてみればよい。

その結果が、図 6(b) である。この図を見るとわかるように、あるいは Standard Map の相図 1 を見れば明らかなように、周波数空間と違って相空間は摂動によってゆがんでしまっている。よって、相空間の図を見るときは周波数空間との対応を見ながら、その共鳴領域がいかなる共鳴条件 $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + M = 0$ を満たしているかを同定しながら論じることにする。

周波数空間での表示で分布が線状ではなくぼやけて広がっている部分が、大きな不安定性を持っているのがわかる。その領域は、結合方向の共鳴線に沿った共鳴領域が成長し、縦横に走った共鳴線に沿った共鳴領域と重なり合ったことによって形成されている。このように共鳴領域が重なり合った領域は、周波数空間で見られたことを裏付けるように、結合方向の共鳴線 $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + M = 0$ の内、低次の共鳴の周りで見られている。

これらの観察からわかるのは、周波数空間での分布が、共鳴線そのものとはならずぼやけて広がってしまうのは、異なる共鳴条件を満たす共鳴領域同士が重なり合って結合することによって単一の共鳴条件では表せないより大きな共鳴領域を形成している場合だということである。今後、このような状況のことを「共鳴線が崩壊している」¹⁰ という言い方で表すことにする。

3.5 パラメータ依存性

次に、パラメータに依存して共鳴の構造がどのように変わるかを周波数空間上で観察する。

3.5.1 素子の非線形強度依存性

まず、各々の素子の非線形パラメータ K の大きさに依存して共鳴の構造がどのように変化するかを調べる。図 7 は結合強度を $b = 0.002$ に固定して、(a) から (f) まで非線形パラメータ K を順に大きくしていったときの周波数空間の変化の様子である。結合の強さは、図 5 のように $K = 0.9$ で共鳴線のウェブ構造がはっきりと見られた場合と等しい値である。

図 7(a)、 $K = 0.5$ の場合は、測定時間内に到達することができなかった領域の方が大きい。しかし、共鳴に沿って広がろうとしている様子がわかる。素子の非線形パラメータ K を大きくしていくと到達できない部分空間は減っていく。

素子の非線形パラメータ K の増大とともに、 $\omega_i = 0$ である四辺から内側に向かってぼやけて広がる領域が成長している。この領域は密集した高次の共鳴領域と $\omega_i = 0$ の共鳴領域が重なっている領域であり、周波数空間上の運動に有効に使われるのだが、そのことについては第 5 節で改めて触れることにする。

また、 K を大きくしていくと、高次の共鳴線が崩壊していく。これは素子である Standard Map

¹⁰ 「共鳴領域の孤立が破れる」とか「高次元空間におけるレゾナンスオーバーラップが起きている」など、他の表現も考えられるが、便宜的にこの表現をとることにする。

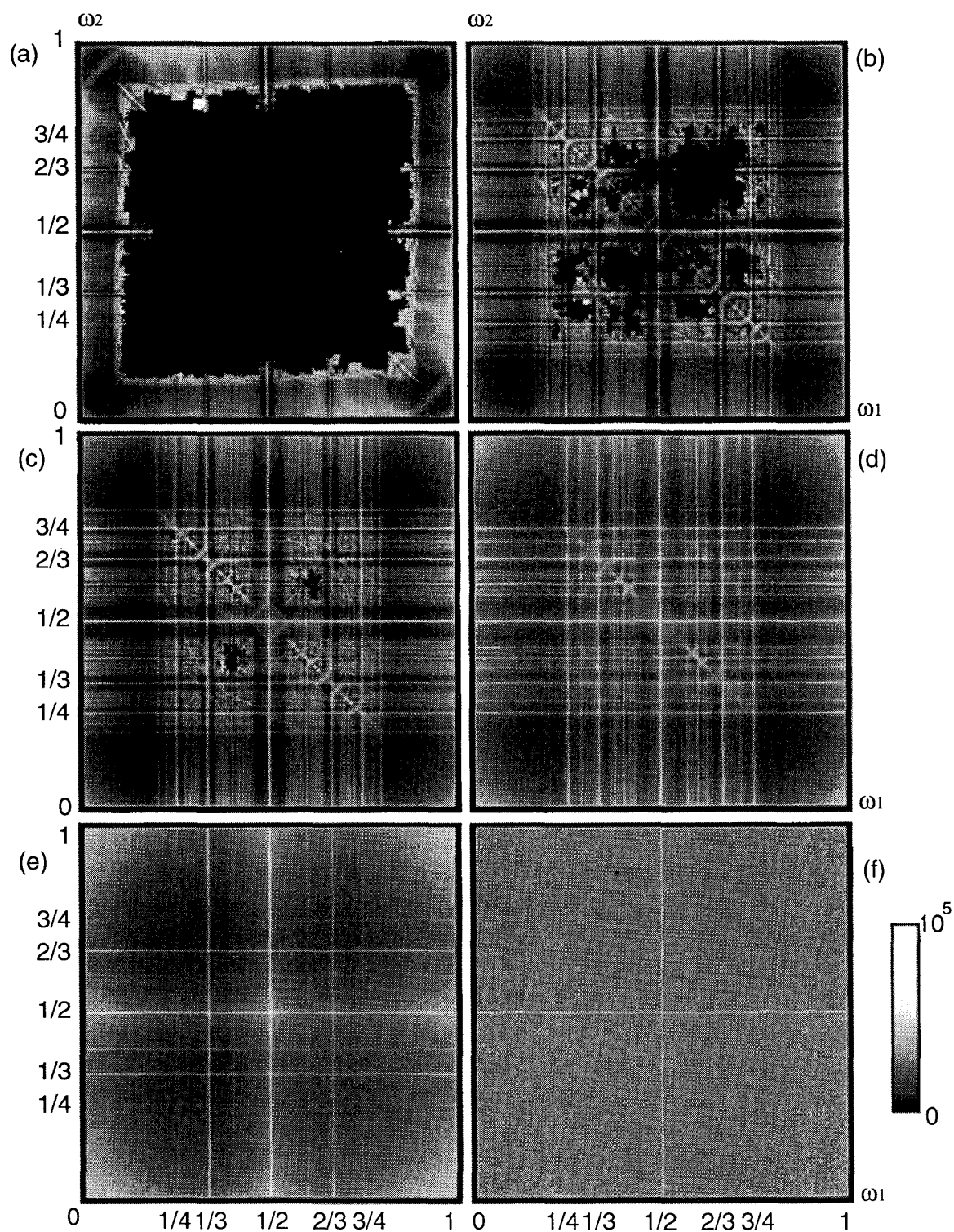


図 7: 周波数空間での頻度分布の素子の非線形パラメータ K 依存性。結合強度 $b = 0.002$ 。 1×10^{10} ステップ。(a) : $K = 0.5$ 、(b) : $K = 0.8$ 、(c) : $K = 0.9$ 、(d) : $K = 1.0$ 、(e) : $K = 1.2$ 、(f) : $K = 2.0$ 。 K の増大とともに有限時間内での到達不能領域が減っていき、高次の共鳴線から順に崩壊していく。また、 K が増していくと結合による異方性が顕著には見られなくなる。

が K の増大と共に起こす変化と同様である。このとき、残るのは $\omega_i = (\text{有理数})$ の共鳴線の低次のものであり、 K の増大と共に結合の寄与の割合は少なくなる。例えば、図 7(e)、 $K = 1.2$ の場合は、周波数空間の分布に結合に由来する異方性は見られない。

本研究の先行研究にあたるような、素子を複数個結合する研究 [KB85, WLL90, WLL94, LA98] においては、結合が「強い」か「弱い」かは、ほとんど気分によって判断されているようである。しかし、結合の強さが強いかわかりは、系の性質の変化を元に考えられるべきである。例えば、結合の寄与する異方性の程度によって強い、弱いを判断すると、素子の非線形パラメータ K の増大とともに、結合力 $b = 0.002$ は弱いといえるようになっていく。

3.5.2 結合強度依存性

次に、結合強度 b に依存して周波数空間の様子がどのように変化するかを調べる。

図 8 は、非線形パラメータが $K = 0.5$ の Standard Map を素子として 2 個結合した時の周波数空間の様子である。結合していない場合の各素子の相図は図 1(b) の通りである。(a) から (f) へ順に結合強度 b が強くなっている。

結合強度 b を大きくしていったとき、斜めに入った結合方向の共鳴線に沿う運動だけでなく、 $\omega_i = (\text{有理数})$ に沿った運動も容易く起きようになっていく。共鳴に沿った運動が他の自由度からのモジュレーションを受けて加速される現象は、resonance streaming として知られており [Ten82]、この場合も同様のことが起きているのだと考えられる。

結合強度 b をさらに大きくすると、結合方向の共鳴線の近くにある高次の共鳴線から順に崩壊していく。図 6(b) は、そのときの相空間の様子を表す例となっている。このような領域は、結合方向の共鳴線に沿った共鳴領域と $\omega_i = (\text{有理数})$ の共鳴領域とが深い角度で交差しており、共鳴領域同士が重なりやすくなっている。

素子の非線形パラメータ K が、より強い場合はどうであろうか。図 9 は非線形パラメータを $K = 0.8$ として結合強度 b を変化させたときの周波数空間の様子である。これは図 1(c) の Standard Map を素子として 2 個結合したものにあたり、図 8 と同様に (a) から (f) へと順に b が強くなっている。 $K = 0.8$ の場合は $K = 0.5$ の場合に比べて、小さい結合強度 b でも有限時間内での到達可能領域が大きいので、結合強度が小さい場合でも高次の共鳴の様子がよくわかる。

結合強度 b が増大して、結合方向の共鳴線の近くにある高次の共鳴線から順に崩壊していくとき、その影響は低次の $\omega_i = (\text{有理数})$ の共鳴線でせき止められ、結合方向の共鳴線から遠い共鳴線は、高次のものでもあまり影響を受けていないことがわかる。これは、結合方向の共鳴線の内、結合強度に依存して強い影響力を持つていくのは低次のものであり ($\omega_1 + \omega_2 = 0$ が最も低次)、高次の結合方向の共鳴領域が成長するには、より大きな結合強度が必要であること、そして低次の $\omega_i = (\text{有理数})$ の共鳴領域は十分な厚みと安定性を持っており、帯状の領域の片側が他の共鳴領域と重なり合っても、反対側には影響が少ないことを意味している。低次の共鳴領域ほど相空間内で厚みを持っていることは、図 5(b) などからわかる。

結合強度 b を大きくしていくと、共鳴領域が重なり合ってきた領域同士がさらに結合していき、より大域的なストカスティック領域を形成していく。

3.6 まとめと議論

本章では局所回転数を用いることによって、共鳴の構造を周波数空間に可視化した。観察された共鳴の構造は以下のようなものであった。

摂動が小さい時は、それぞれの独立した共鳴条件を満たす共鳴領域は、お互いに重なり合っておらず、共鳴条件や共鳴している回転数が特定できる。そして、状態はそれぞれの孤立した共鳴

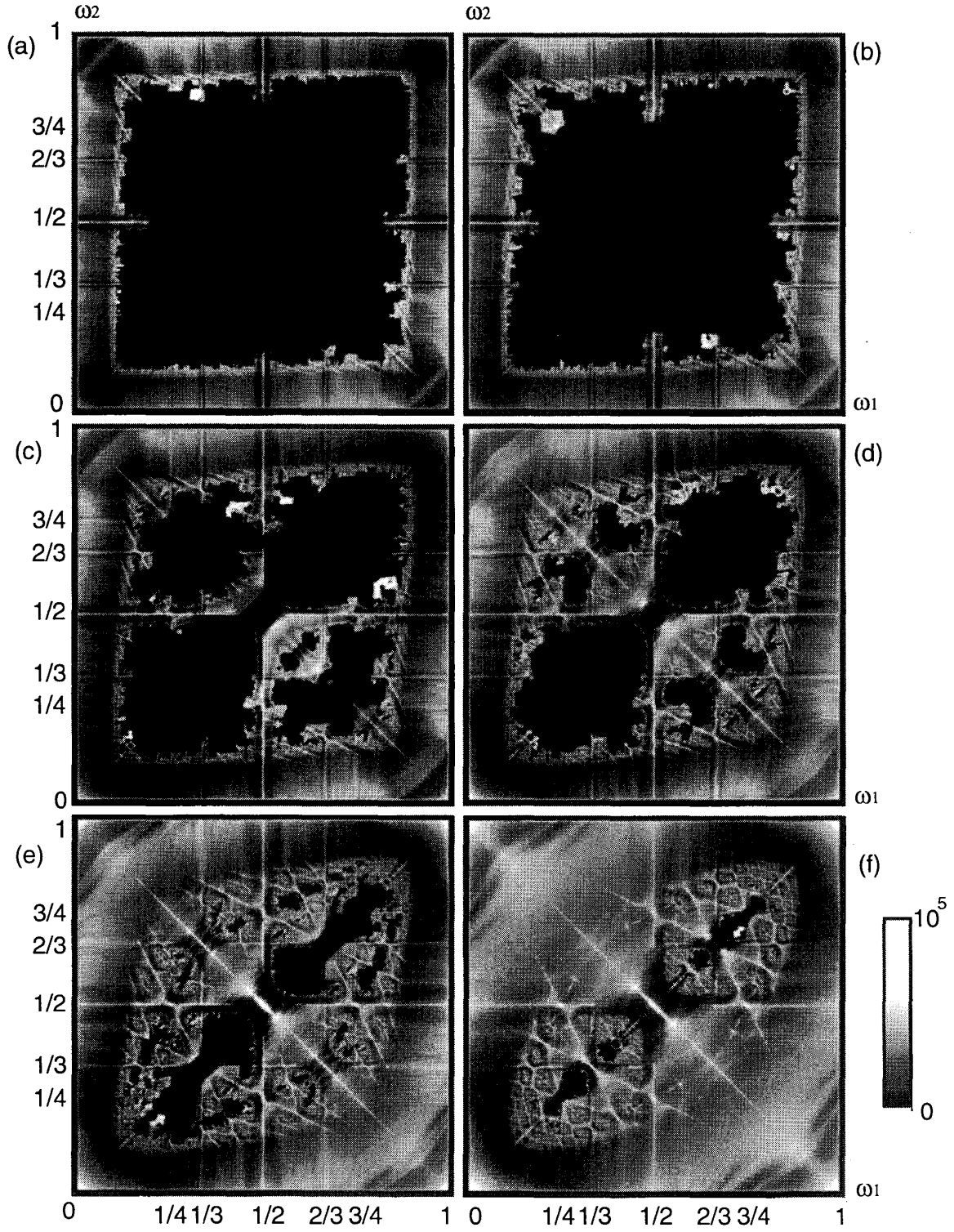


図 8: 周波数空間での頻度分布の結合強度 b 依存性。素子の非線形パラメータ $K = 0.5$ 。 1×10^{10} ステップ。(a) : $b = 0.002$ 、(b) : $b = 0.004$ 、(c) : $b = 0.010$ 、(d) : $b = 0.020$ 、(e) : $b = 0.040$ 、(f) : $b = 0.100$ 。 b の増大とともに有限時間内での到達不能領域が減っていく。また、結合方向の共鳴の周りから高次の共鳴線が崩壊していく。

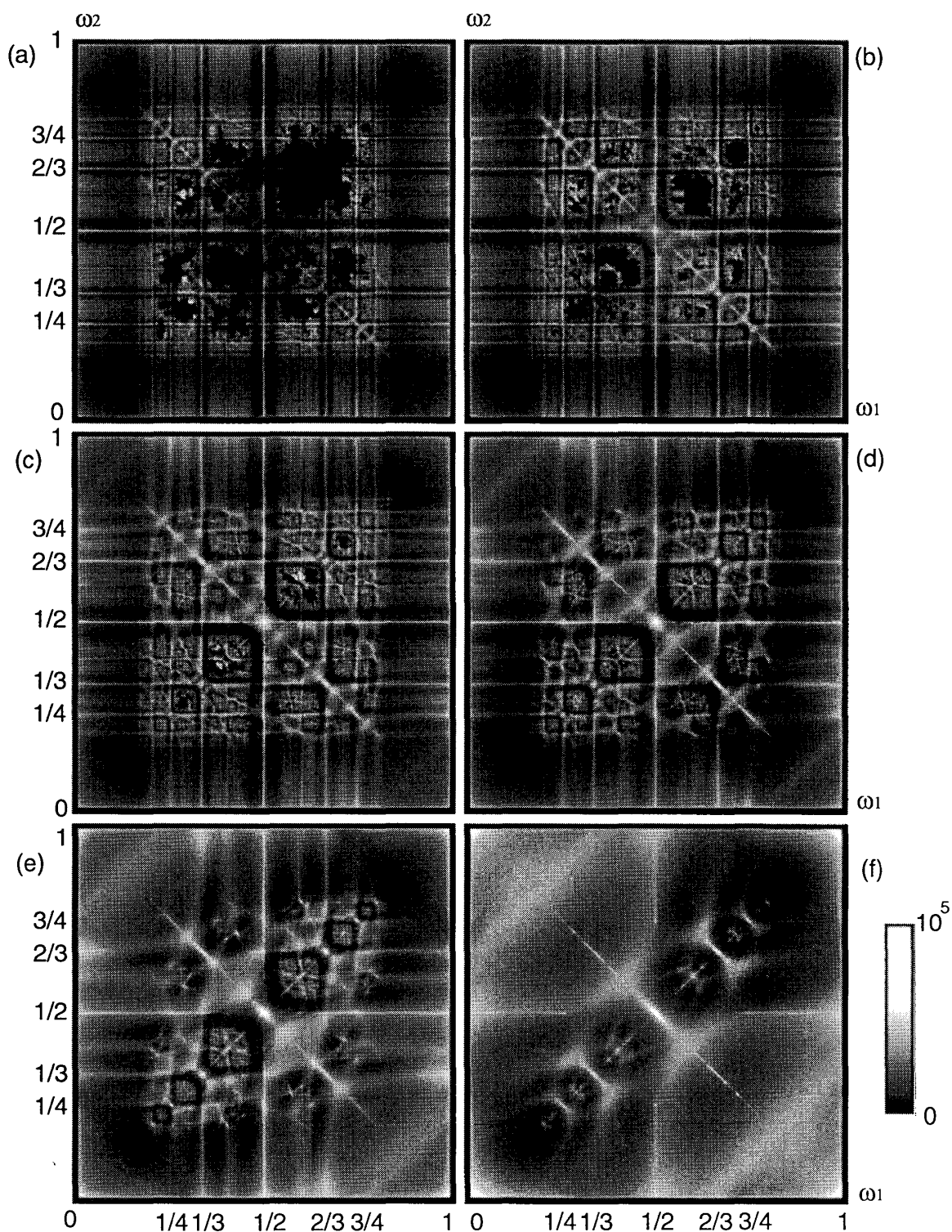


図 9: 周波数空間での頻度分布の結合強度 b 依存性。素子の非線形パラメータ $K = 0.8 \cdot 10^{10}$ ステップ。(a) : $b = 0.002$ 、(b) : $b = 0.004$ 、(c) : $b = 0.010$ 、(d) : $b = 0.020$ 、(e) : $b = 0.040$ 、(f) : $b = 0.100$ 。 b の増大とともに、共鳴領域が重なっていき、結合方向の共鳴の周りから高次の共鳴線が崩壊していく。重なり合った共鳴領域同士がさらなる重なり合いにより結合していき、ついには大域的なカオスに達する。

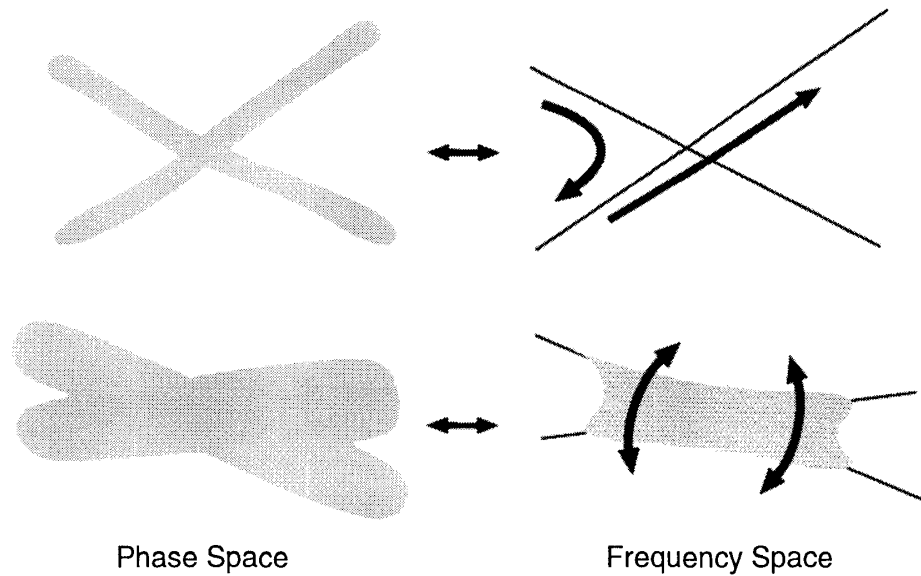


図 10: 相空間と周波数空間の模式図。相空間で共鳴領域の幅が小さく、浅い角度でしか交差していない場合、それぞれの共鳴領域同士の重なり合いは小さい。その場合、それぞれの共鳴領域の共鳴条件が同定でき、周波数空間で共鳴線が観察され、運動は共鳴線に沿った方向に制限される。相空間で共鳴領域の幅が広い、深い角度で交差するかして、共鳴領域同士が重なり合った場合、共鳴領域を単一の共鳴条件で表すことができなくなり、周波数空間での表示は線状にならずにぼやけて広がる。その時、共鳴線に横断的な方向の運動が可能になる。

領域に長く滞在する。よって、周波数空間上の分布は線状に大きな値をもち、共鳴線そのものを観察することができる。

摂動が大きくなると、共鳴領域同士が重なり合い、より大きな共鳴領域を形成するようになる。そのような共鳴領域は、短時間でも回転数が一意に特定できない。よって、そうした領域は周波数空間で広がった分布として表示される。また、そのような領域は周波数空間で共鳴線に横断的につながっている。

共鳴領域同士が重なりやすく共鳴線が壊れやすいのは、共鳴領域同士が深い角度で交差するなどして、密集している領域である。そのような領域の典型例は結合方向の共鳴線の低次のものの周りである。

摂動が小さい場合は、共鳴領域が重なり合って共鳴線が崩壊した領域は点在しており、摂動が大きくなるとともに、それらの領域同士がつながり合うことによって大域的なカオス領域を導く。

以上の観察から得られた結果は、共鳴領域の見目の形成のされ方とつながり方を論じているに過ぎない。では、そこでなされている運動はいかなるものであろうか。

共鳴線が保持されている間は、運動は共鳴線に沿った方向しか許されず、図 10 の上の場合の様に一次元の運動をしていると考えられる。共鳴領域が重なり合って共鳴線が崩壊した後は、崩壊した共鳴線に横断的な運動が許されるようになり、周波数空間では図 10 の下の場合の様に、二次元の運動をするようになると予想される。その場合は、運動の次元の増加が大域的な拡散を加速するのであろう。

共鳴に沿った運動は遅いことが知られているが、KAM トーラス崩壊後の Standard Map の振舞いを思い出してもわかるように大域的なカオスを実現されたとき、運動は決して遅いものではない¹¹[Chi79, LL92]。また、Laskar は数値実験によって、共鳴に横断的な運動が共鳴線に沿った

¹¹ただし二次元写像の場合は周波数空間は一次元であり、共鳴に沿った／横断的という概念はない。

運動比べて速いことを指摘している [Las93]。もし共鳴線に横断的な運動と共鳴線に沿った運動のタイムスケールに違いがあるのならば、共鳴線に横断的な速い運動がどれほど許されるかが、大域的な拡散の速さに直接的に関わることが予想される。

以降の節では、共鳴線の崩壊とともに許される運動の次元はどのように変わるか、そして許される運動の速さはどのように変わるかについて上記の予想をもとに調べていくことにする。

4 共鳴線の滞在時間分布

4.1 導入

第3節ではパラメータに依存して共鳴線がどのように崩壊していくかを観察した。本章では、共鳴線が崩壊しているか否かによって、許される運動がどのように変化するかを調べる。

周波数空間での表示の利点は、相空間中の共鳴領域の体積と位置を見積もることなく、状態がどの共鳴状態にあるかを同定するのが容易なことである。その利点を活用して、それぞれの共鳴線に対して滞在時間分布を求めることにより、第3節最後に予想を述べたように運動の次元が変わるかどうかなを確認する。

4.2 手法

それぞれのパラメータ、それぞれの共鳴線に対して、滞在し続ける時間が t である頻度を求め、その頻度を滞在時間分布とする。

構成した周波数空間上の共鳴線には太さがある。これは局所回転数が有限時間で求められているために消し去れないゆらぎがあるからだ。そこで、共鳴条件 $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + M = 0$ で決まる共鳴線からの距離が、ある閾値 W に入っているものを共鳴条件を満たしていると見なすことにする。少なくとも以降の測定の範囲では、 W を 0.0004 から 0.0030 の間で変化させてもほぼ同じ滞在時間分布が得られ、滞在時間分布が閾値に敏感によらないことはわかった。そこで、今後は断らない限り、図3や第3節の一連の頻度分布図から考えられる共鳴線の太さとコンシステントである $W = 0.0015$ を採用する。

素子の非線形パラメータを $K = 0.8$ 、結合強度を $b = 0.002$ とする。このパラメータのときの周波数空間の様子は図9(a)の通りである。周波数空間の図を見てもわかるように、この場合は共鳴線が崩壊しておらず、共鳴線そのものが観察できる。閾値を $W = 0.0015$ としたときの $\omega_i = 1/2$ の滞在時間分布は図11のようになる。分布は滞在時間 t に対して $t^{-3/2}$ に比例していることがわかる。

第3節で見た通り、測定した有限時間で状態は周波数空間の全ての領域に到達しているわけではなく、周波数空間での頻度分布は定常分布とはなっていない。ならば、本章で測定している共鳴線上の滞在時間分布も測定時間に依っているのではないかと疑義が自然と湧く。そこで、図11では、測定時間 T を $T = 10^{10}$ ステップとして得た分布と、測定時間をその $1/10$ である $T = 10^9$ ステップとして得た分布を10倍したものとの重ね書きしている。二つの滞在時間分布は両者とも $t^{-3/2}$ に比例して、よく重なり合う。つまり、少なくとも現在の測定時間である $T = 10^{10}$ ステップでは、信頼できる滞在時間分布を得ている。

4.3 滞在時間分布の共鳴次数依存性

共鳴線の滞在時間分布が、共鳴の次数に対してどのように変化するかを測定してみることにする。

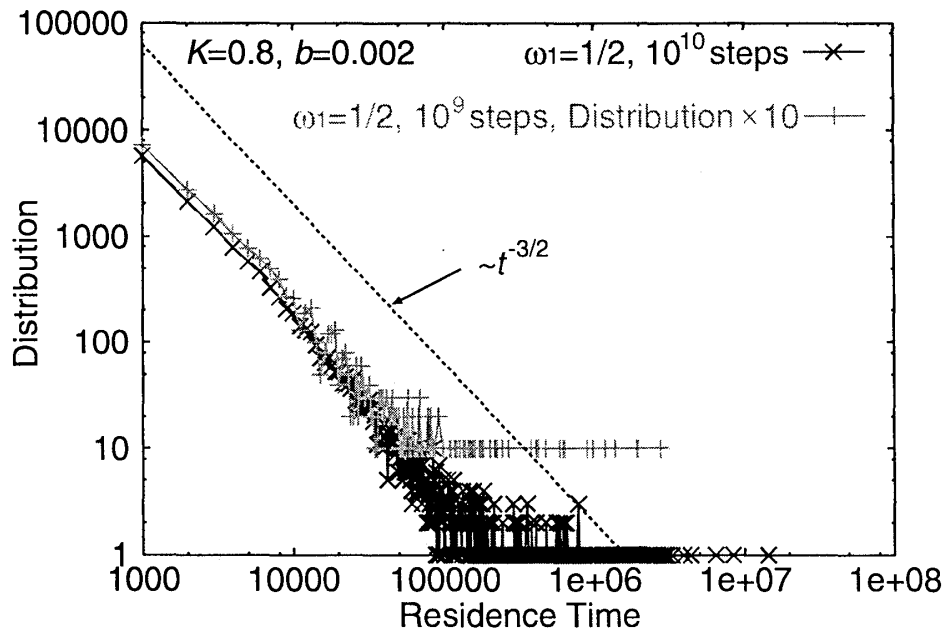


図 11: 共鳴線上の滞在時間分布。素子の非線形パラメータ $K = 0.8$ 、結合強度 $b = 0.002$ 。調べた共鳴線は $\omega_1 = 1/2$ 。分布を調べた $\omega_1 = 1/2$ の共鳴線は、それぞれ線状に分布が観察され、崩壊していない。測定時間 $T = 10^{10}$ ステップで得られた滞在時間分布と、 $T = 10^9$ ステップで得られた滞在時間分布を 10 倍したものとの重ね書きしてある。安定して同じ分布を得ており、その滞在時間分布は $t^{-3/2}$ に比例する。

素子の非線形パラメータを $K = 0.8$ 、結合強度を $b = 0.002$ とする。周波数空間の様子は図 9(a) の通りであり、 $\omega_1 = 1/2, 1/3, 1/4, 1/5$ の共鳴線は線状に観察されるが、 $\omega_1 = 1/6$ の共鳴線は特定が難しい。

これら 5 本の共鳴線に対して滞在時間分布を求めた結果が図 12 である。低次の共鳴では滞在時間分布は滞在時間 t に対して $t^{-3/2}$ に比例するが、共鳴の次数が上がるにつれ分布は早く落ちるようになる。周波数空間で特定が困難であった $\omega_1 = 1/6$ の共鳴線に至っては滞在時間分布は t^{-2} に比例している。

4.4 滞在時間分布の素子の非線形強度依存性

次に、共鳴線の滞在時間分布がパラメータの値に依存してどのように変わるかを調べる。

まず、素子の非線形パラメータ K に依存して滞在時間分布がどのように変化するかを見る。ここでは、結合強度を $b = 0.002$ に固定し、 $\omega_1 = 1/2$ を満たす共鳴線を例として滞在時間分布を測定する。

素子の非線形パラメータとして $K = 0.5, 0.8, 0.9, 1.0, 1.2$ と変化させながら、滞在時間分布を求めた。対応する周波数空間は図 7 の (a) から (e) までである。全てのパラメータ領域に渡って $\omega_1 = 1/2$ の共鳴線ははっきりと線状に確認される。図 7(a) の $K = 0.5$ の場合は $\omega_1 = 1/2$ の共鳴線は周波数空間全域を貫いて走ってはいないが、測定時間の変化に対して安定して同様の滞在時間分布が得られたので、ここでは測定結果として採用する。

測定の結果は図 13 の通りであった。絶対値こそ違えど、ほぼ一貫して $t^{-3/2}$ に比例する滞在時間分布が得られている。よく観察すると、 K が大きくなる程、滞在時間分布は早く落ちており、

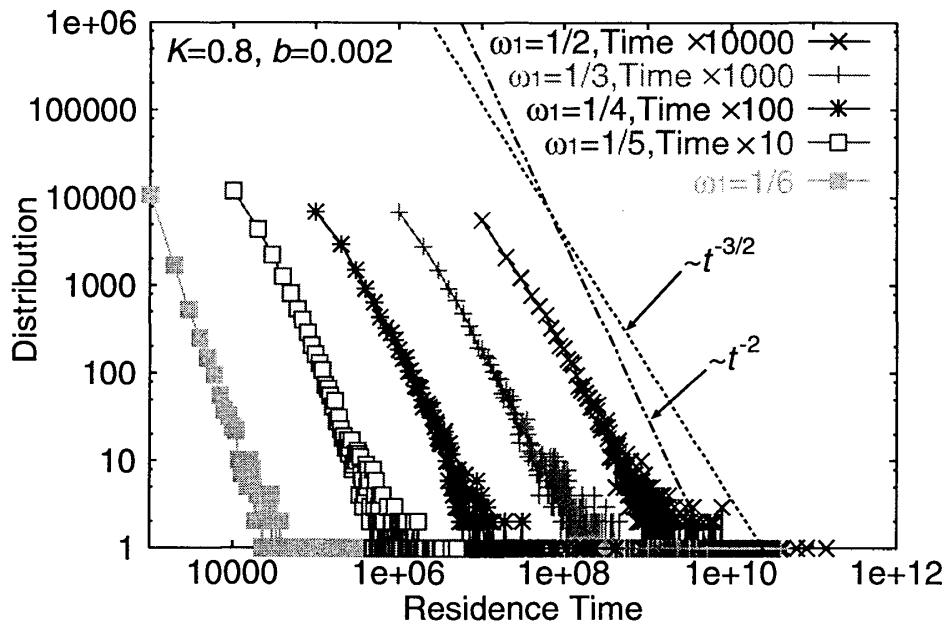


図 12: 滞在時間分布の共鳴次数依存性。素子の非線形パラメータ $K = 0.8$ 、結合強度 $b = 0.002$ 。測定時間 $T = 10^{10}$ ステップ。調べた共鳴線は $\omega_1 = 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6$ 。次数が上がる程、滞在時間分布は早く落ちるようになり、 $t^{-3/2}$ から t^{-2} へと変化していく。

その傾向は $K = 1.2$ の場合に顕著である。図 7 の周波数空間の様子を比べてみると、 K の値が大きい程 $\omega_1 = 1/2$ の共鳴線の周辺がかすれたようにぼやけており、やはり $K = 1.2$ の場合に、その傾向は顕著である。

4.5 滞在時間分布の結合強度依存性

次に、結合強度 b の変化に対して滞在時間分布がどのように依存して変化するかを調べる。

ここでは、素子の非線形パラメータを $K = 0.8$ とし、 $\omega_1 = 1/2$ を満たす共鳴線を例として滞在時間分布を調べた結果を示す。結合強度を $b = 0.001, 0.002, 0.004, 0.010, 0.020, 0.040, 0.100$ と変化させ、それぞれについて滞在時間分布を求めた。対応する周波数空間は図 9 の通りである。最も小さい結合の値である $b = 0.001$ の時の周波数空間の様子は示していないが、それは図 9(a) の $b = 0.002$ の場合とほとんど変わらないものである。結合強度 b の増大とともに、 $\omega_1 = 1/2$ を満たす共鳴線は徐々に崩壊していく。

図 14 の通り、結合強度 b が小さい領域では滞在時間分布は $t^{-3/2}$ に比例する。 b が大きくなり共鳴線が崩壊していくと、滞在時間分布は早く落ちるようになり、 t^{-2} に比例するように変化していく。

4.6 測定のまとめ

これまで、共鳴線の滞在時間分布が、共鳴の次数の変化、素子の非線形パラメータの値の変化、結合の強さの変化のそれぞれに依存して、どのように変わるかを調べてきた。また、そのとき、滞在時間分布と周波数空間の様子とを対応させながら観察した。それらの結果をまとめると以下の通りになる。

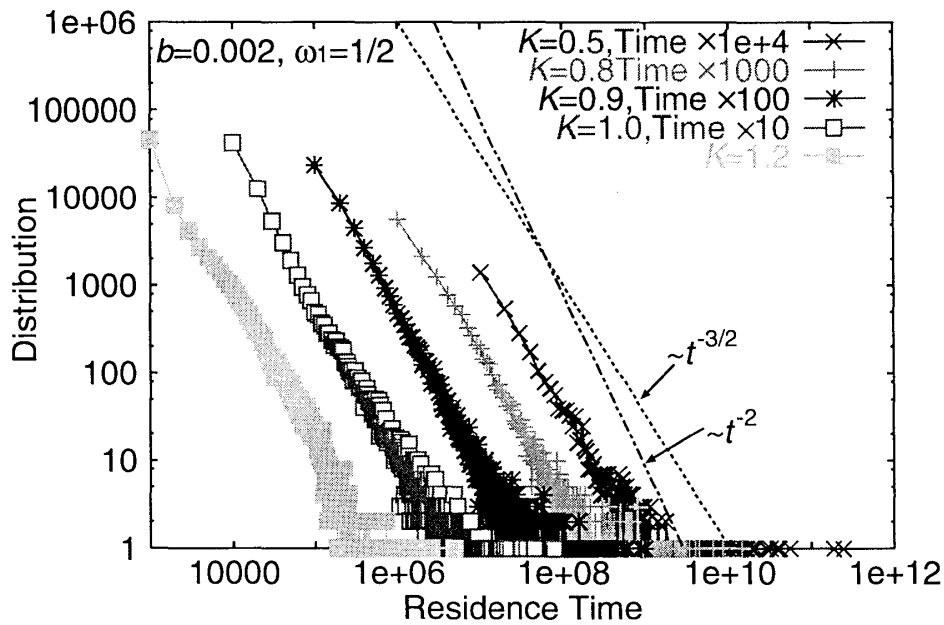


図 13: 滞在時間分布の素子の非線形パラメータ K 依存性。調べた共鳴線は $\omega_1 = 1/2$ 、結合強度は $b = 0.002$ 。測定時間 $T = 10^{10}$ ステップ。 $K = 0.5, 0.8, 0.9, 1.0, 1.2$ の場合の滞在時間分布を横軸をずらして重ね書きしてある。図 7 の周波数空間の様子から、全ての共鳴線は明確に線状のものとして判別できる。一貫してほぼ $t^{-3/2}$ に比例しているが、 K の増大とともに滞在時間分布は早く落ちるようになる。

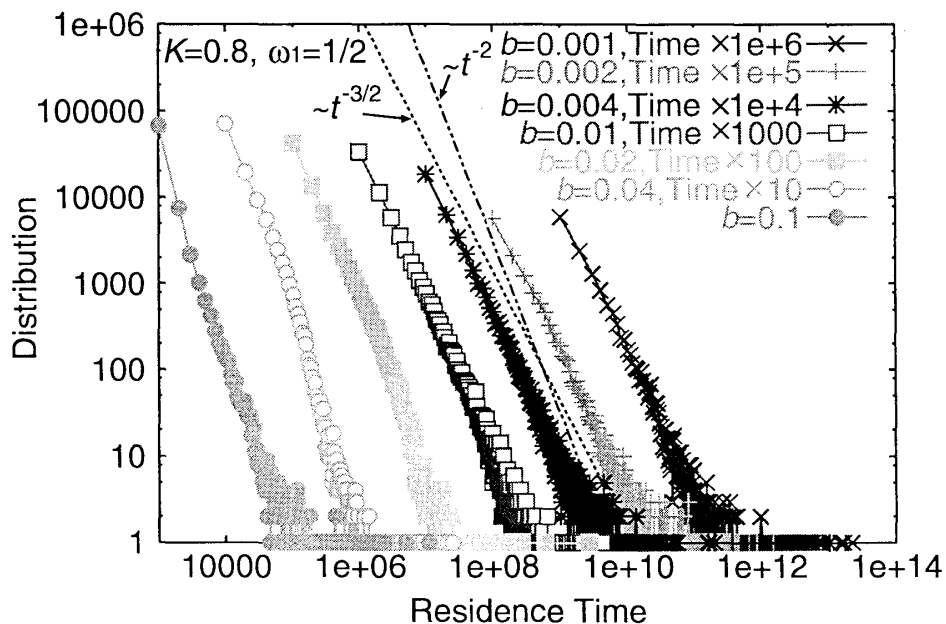


図 14: 滞在時間分布の結合強度 b 依存性。調べた共鳴線は $\omega_1 = 1/2$ 、素子の非線形パラメータは $K = 0.8$ 。測定時間 $T = 10^{10}$ ステップ。 $b = 0.001, 0.002, 0.004, 0.010, 0.020, 0.040, 0.100$ の場合の滞在時間分布を横軸をずらして重ね書きしてある。 b の増大とともに滞在時間分布は早く落ち、 $t^{-3/2}$ から t^{-2} へと変化していく。

周波数空間上で共鳴線がはっきりと観察される場合、その共鳴線の滞在時間分布は滞在時間 t に対して、 $t^{-3/2}$ に比例する。同一パラメータでは次数の高い共鳴線ほど崩壊しており、また、非線形パラメータ K の増加や、結合強度 b の増加とともに共鳴線は崩壊していく。そのとき、共鳴線が崩壊するほど滞在時間分布は早く落ちようになり、滞在時間分布が t^{-2} に比例するようになる。

4.7 ブラウン運動によるべきの導出

では、共鳴線が崩壊していない場合と崩壊している場合の滞在時間分布のべき指数の違い、 $-3/2$ と -2 との違いはどのように解釈すれば良いのであろうか。

ハミルトン力学系では共鳴していれば、すなわち運動はカオスである。よって、運動にある程度の乱雑さが仮定できる。ここでは十分な乱雑さを仮定し、運動がブラウン運動だとすることによって、それぞれのべき指数を導出する。

4.7.1 一次元：共鳴線に沿った運動のみが許される場合

まず、共鳴領域が重なり合っていない場合の、崩壊していない共鳴線の滞在時間分布を考える。一次元の共鳴線上で運動は拡散係数 D のブラウン運動であり、他の共鳴線と交差する接合点で共鳴線から飛び出すと仮定する。

共鳴線上に x 軸を考え、状態が共鳴線から出ていく接合点は $x = x_1$ および $x = x_2$ にあるとする。時刻 t での x の確率分布を $P(x, t)$ とする。初期値として

$$P(x, 0) = \delta(x) \quad (10)$$

とすると、時刻 t での確率分布は

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (11)$$

となる。時刻 t で x_1 と x_2 の間にいる確率は

$$W(x, t) = \int_{x_1}^{x_2} P(x, t) dx \quad (12)$$

よって滞在時間分布は

$$w(t) = -\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \frac{t^{-3/2}}{4\sqrt{\pi D}} \left(x_2 \exp\left(-\frac{x_2^2}{4Dt}\right) - x_1 \exp\left(-\frac{x_1^2}{4Dt}\right) \right) \quad (13)$$

である。 $t \rightarrow \infty$ とすると $w(t) \propto t^{-3/2}$ となり、崩壊していない共鳴線の滞在時間分布のべき指数、 $-3/2$ を得る。

4.7.2 二次元：共鳴線に横断的に動ける場合

次に、共鳴領域が重なり合い、共鳴線が崩壊している場合について考える。この場合は、共鳴線の接合点からだけでなく、任意の場所から共鳴線に横断的な方向に脱出できるようになっていると考えられる。再び、ブラウン運動を仮定する。共鳴線の滞在時間分布を求めたとき、共鳴線からある閾値距離 W 以内にあるものは共鳴線にあるとして測定した。つまり、共鳴線に横断的な方向の辺の長さが、 $2W$ である長方形への滞在時間分布を求めたことになる。すると、いま求めたいものは、二次元のブラウン運動の、長方形での滞在時間分布ということになる。

一次元の場合と同様に、共鳴線上に x 軸を考え、接合点は $x = x_1$ および $x = x_2$ にあるとする。また、 y 軸を共鳴線に横断的にとる。 $y = y_1$ および $y = y_2$ で長方形の辺に達し、共鳴線と判定されなくなるとする。

時刻 t での (x, y) の確率分布を $P(x, y, t)$ とする。初期値は

$$P(x, y, 0) = \delta(x)\delta(y) \quad (14)$$

であるとする。 x 方向には拡散係数 D_x で、 y 方向には拡散係数 D_y でブラウン運動しているとすると時刻 t での (x, y) の確率分布は

$$P(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_x t}} \frac{1}{\sqrt{4\pi D_y t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t}\right) \quad (15)$$

となる。よって、時刻 t で $[x_1, x_2]$ かつ $[y_1, y_2]$ にいる確率は

$$W(x, y, t) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} P(x, y, t) dx dy \quad (16)$$

である。エラーファンクション

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt \quad (17)$$

を用いると滞在時間分布は

$$\begin{aligned} w(t) &= -\frac{\partial W(x, y, t)}{\partial t} \\ &= \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{8\sqrt{\pi D_x}} \left\{ \text{erf}\left(\frac{y_2}{2\sqrt{D_y t}}\right) - \text{erf}\left(\frac{y_1}{2\sqrt{D_y t}}\right) \right\} \left\{ x_2 \exp\left(-\frac{x_2^2}{4D_x t}\right) - x_1 \exp\left(-\frac{x_1^2}{4D_x t}\right) \right\} \\ &\quad + \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{8\sqrt{\pi D_y}} \left\{ \text{erf}\left(\frac{x_2}{2\sqrt{D_x t}}\right) - \text{erf}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{D_x t}}\right) \right\} \left\{ y_2 \exp\left(-\frac{y_2^2}{4D_y t}\right) - y_1 \exp\left(-\frac{y_1^2}{4D_y t}\right) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

となる。エラーファンクションを $z = \infty$ のまわりで展開すると

$$\text{erf}(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} - \frac{2z^3}{3\sqrt{\pi}} + \frac{z^5}{5\sqrt{\pi}} + O(z^6) \quad (19)$$

であるので、 $t \rightarrow \infty$ で $w(t) \propto t^{-2}$ を得る。つまり崩壊した共鳴線の滞在時間分布のべき指数として -2 を得る。

4.8 同一共鳴線上での滞在時間分布の違い

素子の非線形パラメータが $K = 0.5$ の場合の周波数空間の様子を表す図 8(e) と図 8(f) を比べてみる。図 8(e) の結合強度が $b = 0.040$ の場合は $\omega_1 = 1/3$ の共鳴線が、 $\omega_2 \geq 1/2$ 、つまり上半分の領域と、 $\omega_2 < 1/2$ 、つまり下半分の領域の両方に対して部分的に認められる。これに対し、図 8(f) の $b = 0.100$ の場合は $\omega_1 = 1/3$ の共鳴線が $\omega_2 < 1/2$ の領域に対しては部分的に認められるが、 $\omega_2 \geq 1/2$ の領域では明確な線は全く認められない。

このように同一共鳴線上でありながら、周波数空間の領域によってはっきりと崩壊の程度が違う場合に、滞在時間分布を領域ごとに調べてみることにする。

まず、先に挙げた二つの例の内の前者、周波数空間の下半分および上半分の両方の領域で共鳴線が部分的に認められる場合を見てみる。素子の非線形パラメータが $K = 0.5$ 、結合強度が $b = 0.040$ の場合に $\omega_1 = 1/3$ の共鳴線について調べてみる。このパラメータにおける周波数空間

の様子は、先に述べた通り、図 8(e) の通りである。 $\omega_1 = 1/3$ の共鳴線の全領域、下半分に対応する $\omega_2 < 1/2$ の領域、上半分に対応する $\omega_2 \geq 1/2$ の領域のそれぞれについて滞在時間分布を求めたものが図 15 である。 $\omega_2 \geq 1/2$ の領域と $\omega_2 < 1/2$ の領域の間に、大きな違いは認められない。べき指数は -2 であり、これは周波数空間の図を見てもわかる通り、共鳴線が認められるのは両方の領域の一部であり、多くの領域では崩壊していることと対応している。

先に挙げた二つの例の内の後者、周波数空間の上半分および下半分の両方の領域で共鳴線が認められるかどうかははっきりと違う場合はどうだろうか。素子の非線形パラメータ $K = 0.5$ 、結合強度が $b = 0.100$ の場合にやはり同様に $\omega_1 = 1/3$ の共鳴線について見てみる。このパラメータに対する周波数空間の様子は図 8(f) の通りである。前の例と同様に、 $\omega_1 = 1/3$ の共鳴線の、全領域、下半分の $\omega_2 < 1/2$ の領域、上半分の $\omega_2 \geq 1/2$ の領域、のそれぞれについて滞在時間分布を求めたものが図 16 である。共鳴線が全く認められない $\omega_2 \geq 1/2$ の領域では、部分的に共鳴線が認められる $\omega_2 < 1/2$ の領域に比べて滞在時間が顕著に短くなっているのがわかる。つまり、滞在時間分布から共鳴の崩壊の程度がわかるのだ。

$\omega_2 \geq 1/2$ の完全に共鳴線が崩壊している領域については t^{-2} よりも早く滞在時間分布が落ちている。このことから考えられるのは、べき指数が $-2/3$ 、 -2 というのは共鳴線上の滞在に関して主要な寄与をする部分にのみ成り立つことなのかも知れないということである。実際、ここでも $\omega_1 = 1/3$ の共鳴線全体および、そのうちの $\omega_2 < 1/2$ の領域については、滞在時間分布は t^{-2} に比例している。もしくは、十分な数のデータが取れていないせいであるかも知れない。ブラウン運動を仮定した場合でも、べき指数は $t \rightarrow \infty$ の時の漸近形であり、実際、二次元で速い運動をしている場合に、細い帯状の領域で長時間のものを含む滞在時間分布を取るのは困難である。

4.9 まとめと議論

本章では共鳴線の滞在時間分布を測定することにより、崩壊していない共鳴線の滞在時間分布は、滞在時間 t に対して $t^{-3/2}$ に比例することを見た。また、共鳴線が崩壊していくと滞在時間分布は早く落ちるようになり、 t^{-2} に近付いていくという結果を得た。

これらのべきはそれぞれ、一次元および、二次元のブラウン運動を仮定すると導出できる。このことから、共鳴領域の重なっていない共鳴線上では共鳴線に沿った一次元運動をしており、共鳴領域が重なると崩壊した共鳴線に横断的な運動が加わって二次元運動をするようになると考えることができる。

べき指数の違いから単純に考えると、崩壊していない共鳴線は第 3 節で見たように頻度分布が単に大きいだけでなく状態は共鳴線自体に長い時間連続的に滞在しており、崩壊した共鳴線には長時間の滞在はしていないことがわかる。

滞在時間分布の変化の仕方は $t^{-3/2}$ から t^{-2} へと突然変化するのではなく、徐々に変化していく様子が見られた。つまり、共鳴線の崩壊の仕方は突然起こるものではなく、共鳴領域が他の共鳴線の共鳴領域と徐々に重なり合って起こることだと考えることができる。本章では二次元の周波数空間で運動の次元を考えていたが、相空間自体は四次元なのだから、周波数空間では明確に捉えられないような共鳴領域同士の部分的な重なり合い方を局所的な領域でしていても不思議なことではない。

また、同一共鳴線上でも、領域によって共鳴線の崩壊の程度が異なれば、それを反映して滞在時間分布も異なることがわかった。つまり、共鳴線の滞在時間分布を測ることによって共鳴線の崩壊の程度を調べることが出来るということである。

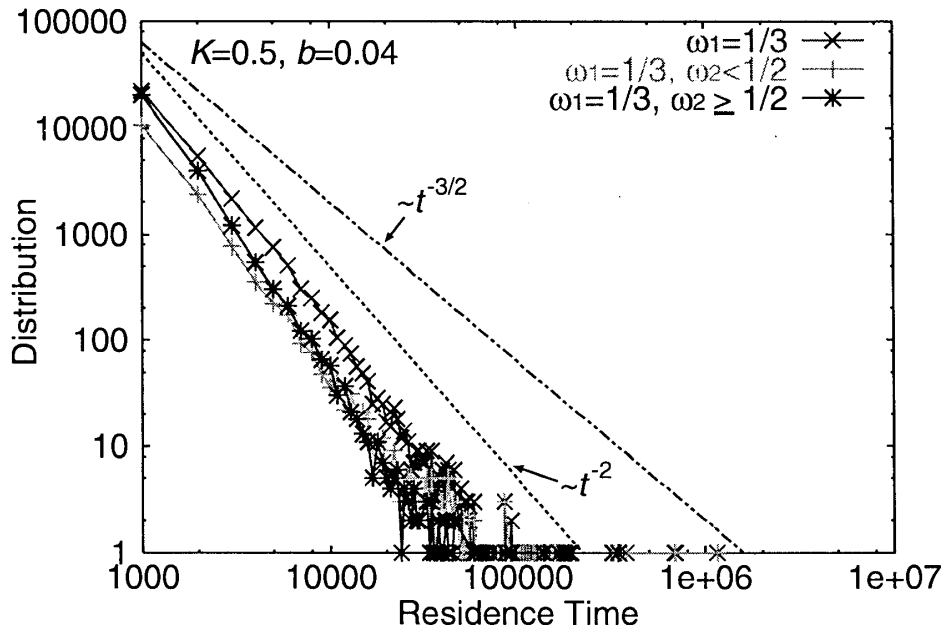


図 15: $\omega_1 = 1/3$ の共鳴線の、 ω_2 の値を問わない全領域、下半分の $\omega_2 < 1/2$ の領域、上半分の $\omega_2 \geq 1/2$ の領域、のそれぞれについての滞在時間分布。素子の非線形パラメータ $K = 0.5$ 、結合強度 $b = 0.040$ 。測定時間 $T = 10^{10}$ ステップ。 $\omega_2 < 1/2$ の領域でも $\omega_2 \geq 1/2$ の領域でも部分的に共鳴線が認められ、滞在時間分布にも大きな違いは見られない。

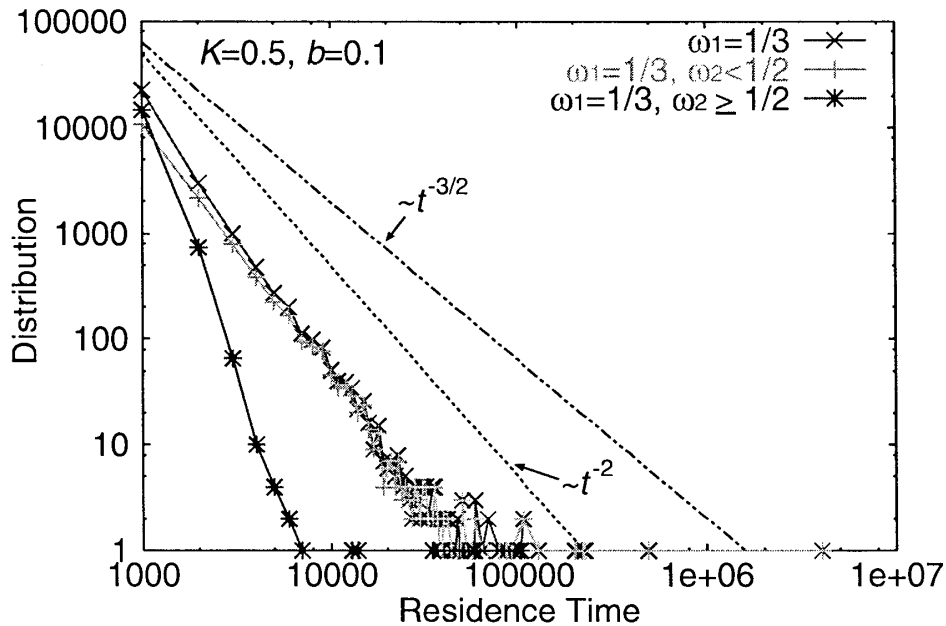


図 16: $\omega_1 = 1/3$ の共鳴線の、 ω_2 の値を問わない全領域、下半分の $\omega_2 < 1/2$ の領域、上半分の $\omega_2 \geq 1/2$ の領域、のそれぞれについての滞在時間分布。素子の非線形パラメータ $K = 0.5$ 、結合強度 $b = 0.100$ 。測定時間 $T = 10^{10}$ ステップ。 $\omega_2 < 1/2$ の領域では部分的に共鳴線が認められるが、 $\omega_2 \geq 1/2$ の領域では共鳴線が全く認められない。滞在時間分布にも明確な違いが見られ、後者の分布は早く落ちている。

区間	区間内に含まれる低次の共鳴 (Index)
$[0, 2/13), [11/13, 1)$	0 (= 1)
$[2/13, 2/11)$	1/6
$[2/11, 2/9)$	1/5
$[2/9, 2/7)$	1/4
$[2/7, 2/5)$	1/3
$[2/5, 3/5)$	1/2
$[3/5, 5/7)$	2/3
$[5/7, 7/9)$	3/4
$[7/9, 9/11)$	4/5
$[9/11, 11/13)$	5/6

表 1: 周波数空間での領域分け

5 遷移の動力学

5.1 導入

第4節では共鳴線が崩壊しているか否かによって、共鳴線に横断的な運動が許されるかどうかが変わることを確認した。同一パラメータの周波数空間においても共鳴の構造は非一様であり、領域によって共鳴線の崩壊の程度は異なる。

第4節で論じたのは、共鳴線が崩壊することによって共鳴線に横断的な方向への運動が可能になり、運動が共鳴線に沿った一次元運動から二次元運動に変わることであった。共鳴線に沿った運動と横断的な運動の、それぞれの性質の違いについては触れていない。本章では、周波数空間上の動力学を観察することにより、共鳴線に沿った運動の性質と横断的な運動の性質が、どのように異なっているのかを調べる。また、その違いが、ハミルトン力学系の輸送や緩和特性にどのような影響を及ぼすのかを検討する。

動力学を観察するといっても、相空間で無限の微細構造をつくるハミルトン力学系の運動の全てを追うことは、舞台が時間粗視化された周波数空間でも不可能である。そこで、周波数空間を前もって領域分けし、それらの間の遷移を調べることによって、動力学の性質を調べることにする。そのような空間的粗視化によって性質が判別できない場合に、適宜、動力学の詳細を見ることにする。

5.2 周波数空間の領域分け

まず、周波数空間を領域分けする。 ω_1, ω_2 のそれぞれについて表1のように分けてインデックスをつけることにする。

領域間を分かちパーティションは、整数 n に対して、 $\omega_i = 2/n$ の共鳴線と、それらとの対称性を満たす $\omega_i = 1 - (2/n)$ の共鳴線である。このように分けられた領域には、各領域にそれぞれ一つずつの $\omega_i = 1/n$ および $\omega_i = 1 - (1/n)$ の共鳴線同士の接合点をもつ。そこで、それぞれの領域を、表1に見られるように、領域内に含まれる $\omega_i = 1/n$ もしくは $\omega_i = 1 - (1/n)$ の共鳴をインデックスとしてコードする。例えば $\omega_1 \in [2/7, 2/5)$ 、 $\omega_2 \in [2/9, 2/7)$ の領域は $\{1/3, 1/4\}$ と名付けられる。

パーティションとして $\omega_i = 2/n$ および $\omega_i = 1 - (2/n)$ の共鳴線を用い、より低次の共鳴線である $\omega_i = 1/n$ および $\omega_i = 1 - (1/n)$ の共鳴線を用いなかったのは、以下の理由による。

第3節で見たように、周波数空間に非一様性を及ぼす共鳴線の崩壊は、結合方向の共鳴線の低次のものによって引き起こされる場合が多い。そして、そのような崩壊は、 $\omega_i = (\text{有理数})$ の共鳴線の低次のものに囲まれた領域で、せき止められるように見える。共鳴線の崩壊が動力学に及ぼす影響を見たいなら、粗視化した領域分けは、崩壊した領域の途中にパーティションがある方が好ましい。なぜなら、パーティションごとの通過のしやすさを調べることと、共鳴線が崩壊しているか否かを対応させて調べることが出来るからだ。もし、共鳴線が崩壊した領域をまるまるパーティションで囲んでしまったら、パーティションをつき抜ける運動と、囲まれた領域の崩壊の程度とを関係付けるのは困難であろう。

また、 $\omega_i = 1/n$ および $\omega_i = 1 - (1/n)$ の共鳴線には状態が長く滞在してしまうので、 $\omega_i = 1/n$ および $\omega_i = 1 - (1/n)$ の共鳴線にパーティションを置くと、 $\omega_i = 1/n$ および $\omega_i = 1 - (1/n)$ 上に滞在しているときの揺らぎも、逐一遷移として拾ってしまう可能性が高い。 $\omega_i = 2/n$ および $\omega_i = 1 - (2/n)$ の共鳴線をパーティションとした場合は、そのようなことが相対的に起きにくい。

5.3 遷移ダイアグラム

遷移ダイアグラムを描く目的は、共鳴に沿った運動の性質と共鳴に横断的な運動の性質の違いを調べ、また、各々の運動が周波数空間のどのような部分で実現されているかを判別することである。よって、調べるべき系は、出来るだけ非一様性が分かりやすく、崩壊する共鳴線の方が特定しやすいものがよい。そこで、まず素子の非線形パラメータを $K = 0.5$ とし、結合強度が $b = 0.040$ と $b = 0.100$ のそれぞれの場合について、遷移ダイアグラムを書くことにする。これらのパラメータに対して、対応する周波数空間および、相空間の断面上の不安定領域の分布を表示したものは、それぞれ図 17(a) と (e) および図 17(b) と (f) の通りである。図 17(a) および (e) の周波数空間の図は、それぞれ図 8(e) および (f) と同じものであるが、共鳴線が崩壊した領域同士がどのようにつながるかは、相空間の不安定領域の分布を参照した方が見やすいため、併せて再び図示した。これらの図によって、結合によって共鳴線が崩壊した領域と高次の共鳴線が認められる領域が判別できる。また、この場合は共鳴線の崩壊が最も顕著に見られるのは共鳴線 $\omega_1 + \omega_2 = 0$ の周辺であることは一目でわかるので、共鳴に沿った方向と横断的な方向の区別が容易であり、議論がしやすい。

遷移ダイアグラムは 10^{10} ステップの時系列から、1000 ステップごとに局所回転数を求め、得られた 10^7 個の局所回転数の間の遷移を全てプロットすることによって構成する。各領域に一つずつある $\omega_i = 1/n$ および $\omega_i = 1 - (1/n)$ の共鳴線同士の接合点を各領域の代表点として、その間を矢印で結ぶことで遷移を表す。系の時間発展ルールは周期境界条件を満たすが、それぞれの遷移の方向と大きさは周期境界を課す前に求める。表示は、遷移が周期境界をまたいでいないときは、その始点が $[0, 1]$ 区間、終点が $[0, 1]$ 区間に入るように、周期境界をまたいでいるときは、遷移の終点が $[0, 1]$ 区間に入るようにする。また、各遷移の終点に丸印を打って見やすくしている。自分自身への遷移については矢印は描かれず、丸印のみで表されることになる。

素子の非線形パラメータが $K = 0.5$ 、結合強度が $b = 0.040$ のときの遷移ダイアグラムは図 18 の通りである。この図を対応する図 17(a)(b) を参照しながら観察してみる。共鳴線が崩壊している領域では、共鳴に横断的に大きな遷移をすることが可能になっている。そのことは、 $\omega_1 \geq 2/3$ かつ $\omega_2 < 1/3$ 、および $\omega_1 < 1/3$ かつ $\omega_2 \geq 2/3$ の領域を見れば特によくわかる。

また、 $1/2 \leq \omega_1 < 2/3$ かつ $1/3 \leq \omega_2 < 1/2$ 、および $1/3 \leq \omega_1 < 1/2$ かつ $1/2 \leq \omega_2 < 2/3$ の領域でも、崩壊した共鳴線 $\omega_1 + \omega_2 = 0$ に横断的な運動をしているのが、領域 $\{1/2, 1/3\}$ と $\{2/3, 1/2\}$ の間の遷移や領域 $\{1/3, 1/2\}$ と $\{1/2, 2/3\}$ の間の遷移からわかる。

共鳴線が崩壊していない領域では、多くは隣接した領域への遷移であり、大きな遷移をすることはない。また、このような領域をまたいで、大きく遷移をすることもない。

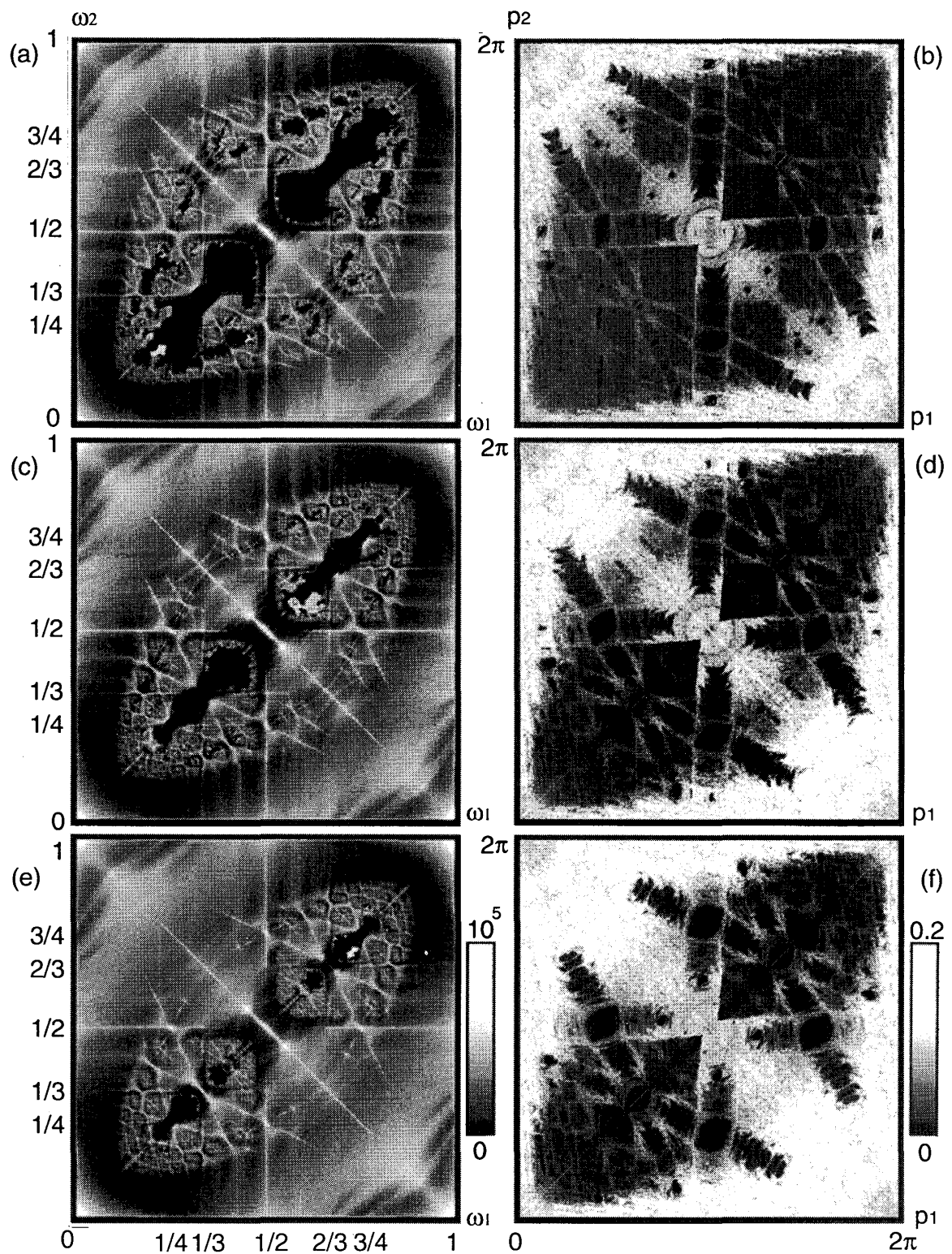


図 17: 左: 周波数空間での頻度分布。 1×10^{10} ステップ。 右: 相空間の断面上の不安定性。 断面は $q_1 = q_2 = \pi$ 。 局所時間 256 ステップ。 $K = 0.8$ 。 (a)(b) \rightarrow (c)(d) \rightarrow (e)(f) の順にそれぞれ $b = 0.040, 0.070, 0.100$ 。

次に、素子の非線形パラメータが $K = 0.5$ 、結合強度が $b = 0.100$ のときの遷移ダイアグラムを観察してみる。遷移ダイアグラムは図 19 の通りであり、対応する周波数空間および相空間の様子は図 17(e)(f) からわかる。共鳴線が崩壊していない領域で、大きく離れた領域へと遷移をしていないことは図 18 と同様である。

$K = 0.5$ 、 $b = 0.100$ の周波数空間および相空間が表示された図 17(e)(f) を、 $K = 0.5$ 、 $b = 0.040$ の周波数空間および相空間が表示された図 17(a)(b) と比べてみる。すると、前者では $\omega_1 \geq 2/3$ かつ $\omega_2 < 1/3$ および $\omega_1 < 1/3$ かつ $\omega_2 \geq 2/3$ に存在する共鳴が重なって崩壊した領域と、 $1/2 \leq \omega_1 < 2/3$ かつ $1/3 \leq \omega_2 < 1/2$ および $1/3 \leq \omega_1 < 1/2$ かつ $1/2 \leq \omega_2 < 2/3$ に存在する同様の領域が、それぞれ融合して一つの共鳴領域を形成しているのが見える。遷移ダイアグラムにもその違いは顕著に表れており、図 19 の右下部と左上部は遷移経路に塗りつぶされている。

また、 $K = 0.5$ 、 $b = 0.100$ の場合は、 $K = 0.5$ 、 $b = 0.040$ の場合に比べて共鳴線 $\omega_i = 0$ ($= 1$) の崩壊が進んだことにより、図 19 で見られるように、周期境界を越える運動が容易に実現されている。

では、共鳴線が崩壊している領域での崩壊した共鳴線に沿った遷移はどのようなになっているのか観察してみる。図 19 を見ると、崩壊した共鳴線 $\omega_1 + \omega_2 = 0$ に横断的な遷移に比べて、 $\omega_1 + \omega_2 = 0$ に沿った方向の遷移は大きさが小さいことがわかる。

以上、遷移ダイアグラムを描いたことによってわかったのは、崩壊した共鳴線に横断的な方向には大きく運動するということである。一方、共鳴線が線状に認められる領域では大きな運動をしてはいない。共鳴線が認められる領域をまたいで大きく遷移することもないので、崩壊していない共鳴線は遷移に対して障壁として振舞っていると考えられる。また共鳴線が崩壊している領域では共鳴線に沿った遷移よりも、共鳴線に横断的な遷移の方が遷移距離が長いことから、共鳴に横断的な運動の方が共鳴に沿った運動よりも速いと考えることができる。

5.4 遷移確率ごとの遷移ダイアグラム：ハブ描像

前節では、長時間走らせた時系列から遷移ダイアグラムを構成して周波数空間での遷移の移動距離と、共鳴の構造との関係を調べた。本節では、前節のダイアグラムを、遷移が実現する確率ごとに場合分けして、詳細に性質を調べる。

図 18 や図 19 で見られた各遷移が起きた回数のそれぞれを、遷移の始点となる領域の総滞在回数で割ったものを遷移確率 P とする。そのようにして得られた P の値ごとに遷移の様子を表したのが、図 20 と図 21 である。

図 20 と図 21 は、素子の非線形パラメータが $K = 0.5$ であり、それぞれ結合強度 $b = 0.040$ および $b = 0.100$ に、つまり図 18 および図 19 に対応している。両図とも、(a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) \rightarrow (d) と順に遷移確率 P が、 $P \geq 10^{-1} \rightarrow 10^{-2} \leq P < 10^{-1} \rightarrow 10^{-3} \leq P < 10^{-2} \rightarrow 10^{-4} \leq P < 10^{-3}$ である遷移を図示してある。

素子の非線形パラメータが $K = 0.5$ 、結合強度が $b = 0.040$ の場合について、図 20 を見てみる。前節の場合と同じように、対応する周波数空間および相空間の様子は図 17(a)(b) の通りである。共鳴線が崩壊していない領域では、異なる領域に遷移せずにとどまり続ける確率が最も高いことが顕著に表われている。このことから、崩壊していない共鳴線が遷移の障壁になっていることが明確にわかる。

共鳴線が崩壊している領域では、共鳴線に横断的な運動が高い確率で実現されており、このような領域は隣接領域を越える大きな遷移の起点となっている。別の言い方をすると、この領域は多くの領域と直接的に遷移経路がつながっているということだ。単なる隣接領域間の遷移のみでは到達するのに長時間を要してしまう領域にも、この共鳴線が崩壊している領域を経由することにより、少ない回数の遷移でたどり着ける可能性がある。この性質は多くのノードに接続したハ

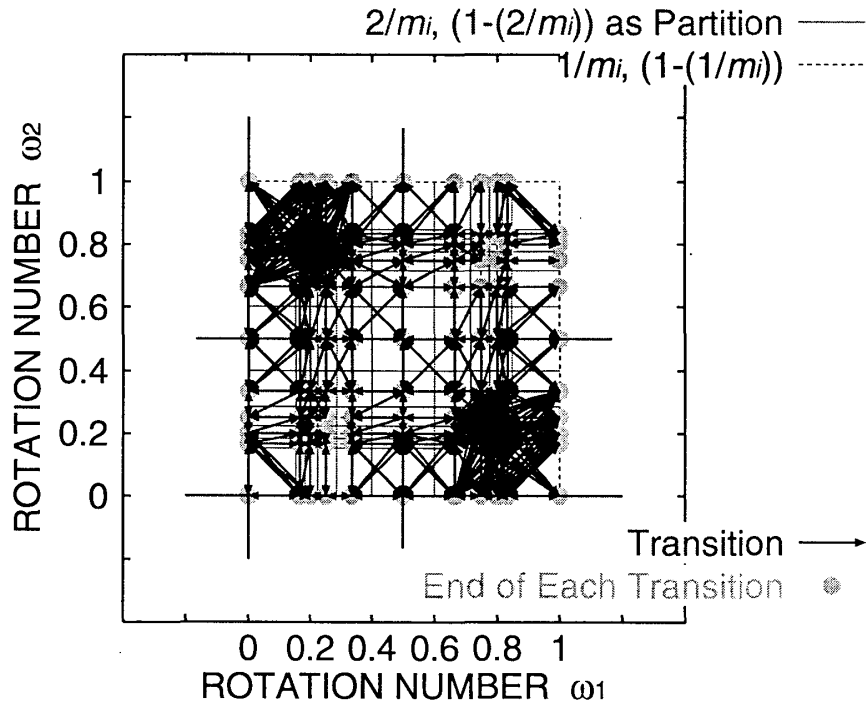


図 18: 周波数空間での遷移ダイアグラム。素子の非線形パラメータ $K = 0.5$ 、結合強度 $b = 0.040$ 。 $(10^7 - 1)$ 回の遷移をプロット。共鳴線が崩壊している領域では、共鳴線に横断的に大きな遷移をしている。共鳴線が崩壊していない領域では、遷移は隣接領域間にとどまる。

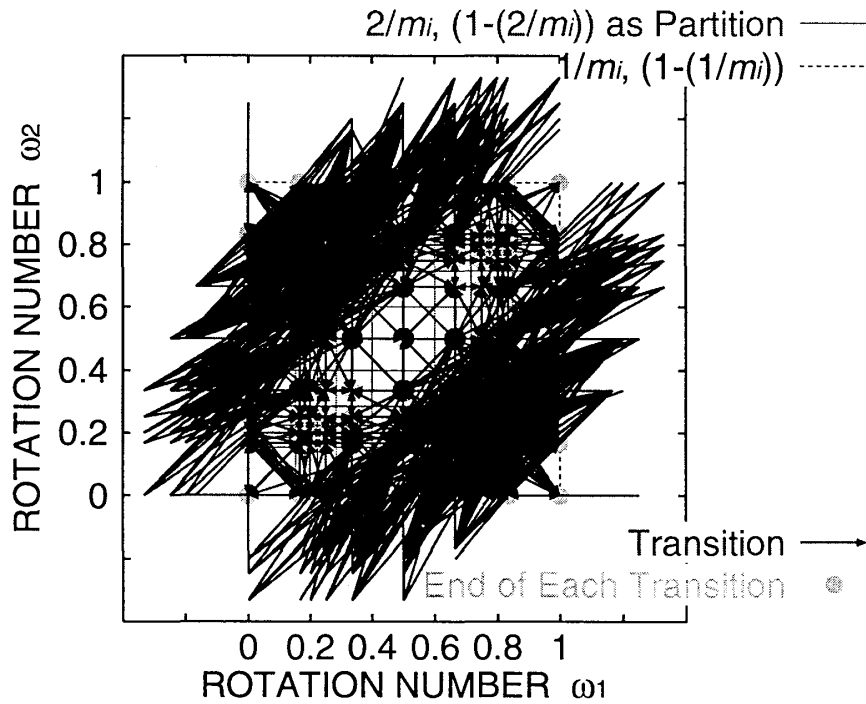


図 19: 周波数空間での遷移ダイアグラム。素子の非線形パラメータ $K = 0.5$ 、結合強度 $b = 0.100$ 。 $(10^7 - 1)$ 回の遷移をプロット。 $b = 0.040$ の場合に比べて共鳴線の崩壊が進んだため、より大きな遷移が観察される。大きな遷移は、崩壊した共鳴線に横断的な方向に起きている。

ブの性質そのものである。

つまり、共鳴線が崩壊している領域は、周波数空間での移動に対して、ハブとして振舞っていると考えることが出来る。直接的には共鳴線の障壁に妨げられて遷移しづらい領域同士も、ハブを経由すると速やかに遷移できる。そのような描像で見ると、 $\omega_1 \geq 2/3$ かつ $\omega_2 < 1/3$ 、および $\omega_1 < 1/3$ かつ $\omega_2 \geq 2/3$ のそれぞれの領域と、 $1/2 \leq \omega_1 < 2/3$ かつ $1/3 \leq \omega_2 < 1/2$ 、および $1/3 \leq \omega_1 < 1/2$ かつ $1/2 \leq \omega_2 < 2/3$ のそれぞれの領域に、それぞれ大きさの違う二組のハブが存在していると言える。

次に、素子の非線形パラメータが $K = 0.5$ 、結合強度が $b = 0.100$ の場合を見てみる。遷移の様子は図 20 の通りであり、周波数空間および相空間は図 17(e)(f) の通りである。結合強度が $b = 0.040$ の場合に比べて、各ハブはより多くの領域を結ぶようになっている。また、共鳴線が崩壊した領域同士が融合することによって、ハブ同士の境目も曖昧となり、大きなハブを形成していると見ることができる。例えば $\omega_1 \geq 2/3$ かつ $\omega_2 < 1/3$ の領域と $1/2 \leq \omega_1 < 2/3$ かつ $1/3 \leq \omega_2 < 1/2$ の領域が、もしくは $\omega_1 < 1/3$ かつ $\omega_2 \geq 2/3$ の領域と $1/3 \leq \omega_1 < 1/2$ かつ $1/2 \leq \omega_2 < 2/3$ が融合したことにより、それぞれ一つの、大きなハブを形成している。

このように、周波数空間には崩壊していない共鳴線によって遷移が妨げられる領域と、共鳴線が崩壊したことによって遷移にとってのハブとなる領域があるということが確認された。さらに、パラメータの変化によってハブ同士が融合し、より大きなハブが形成されることによって、大域的な遷移が可能となることがわかった¹²。

また、ハブは結合共鳴 $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + M = 0$ ($m_1, m_2 \neq 0$) の低次のものと周波数空間を縦横に走る外力との共鳴 $m_i\omega_i + M = 0$ の低次のものとが交差した場所に存在していることが、図 17 や図 20 および図 21 から観察される。

5.5 効率的な遷移

これまで、遷移ダイアグラムを観察することによって、周波数空間でどのような運動がなされるかを見てきた。しかし、単に遷移ダイアグラムを観察するだけでは、ある領域からある領域への直接的な遷移が可能か否かがわかるだけであり、連続した複数のステップで実現される遷移の速さに対する議論をすることはできない。

本節では、遷移の様子を連続的に追いかけることによって、遷移の速さについて議論する。そして、周波数空間で速やかな状態間遷移が実現されるとき、その遷移はどのような運動を利用しているかを調べることで、前節で述べたハブ描像が実際の遷移を既述するのにどれだけ有効かを検討する。

このために、スタート地点とゴール地点を固定してから複数のサンプルを一斉に時間発展させ、速くゴールしたサンプルについて時間発展の遷移ダイアグラムを書いてみることにする。この方法で途中の全過程を調べられるのは速い遷移に関わる経路だけであるが上記の目的には十分であり、そのような経路がどのような性質を持つかを調べることににより、周波数空間の非一様性が輸送にどのように効くかの可能性を探ることができると思われる。

具体的な手順は以下の通りである。まず、スタート地点とゴール地点となる領域をそれぞれ決める。次に、ランダムに初期値を振って局所回転数を計算し、最初の 1000 ステップで計算された局所回転数がスタート領域に入っているとき、その後の時間発展をさせる初期値として採用する。スタート領域に属する初期値が一定数たまったら、それぞれを時間発展させる。そして、短いステップ数でゴールにたどり着いた一定数のサンプルの途中経路の遷移図を書き出して調べて

¹²ハブ／ノードというのは離散的なイメージが強いので、「複数のハブが太い経路で結ばれた」と表現するのが適当かも知れない。しかし、粗視化する以前の、周波数空間の分布がぼやけて広がる様も含めて考えると、「融合した」というイメージの方がしっくりとくる。

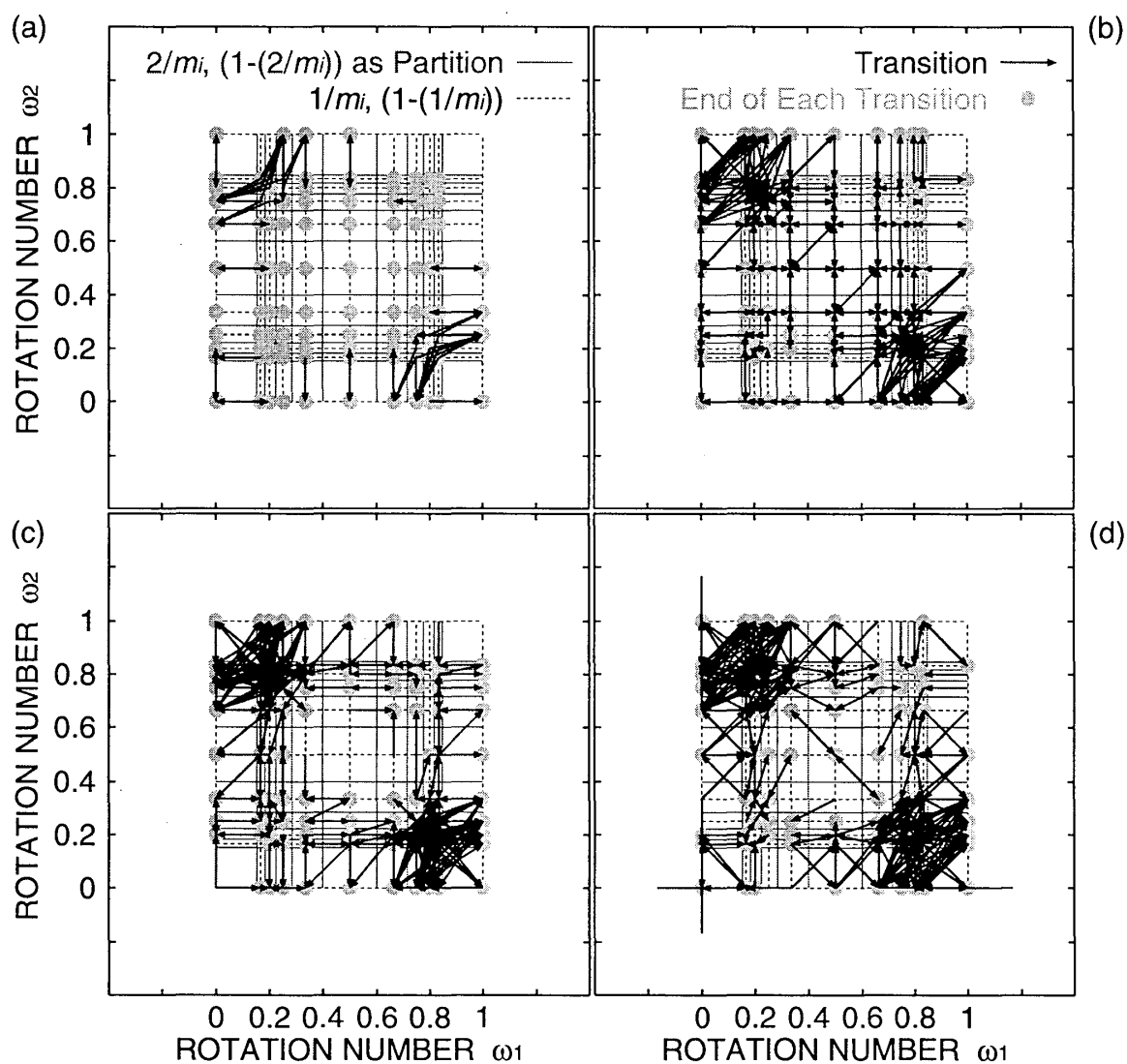


図 20: 遷移確率 P ごとに表した遷移の様子。素子の非線形パラメータ $K = 0.5$ 、結合強度 $b = 0.040$ 。遷移確率は、(a) : $P \geq 10^{-1}$ 、(b) : $10^{-2} \leq P < 10^{-1}$ 、(c) : $10^{-3} \leq P < 10^{-2}$ 、(d) : $10^{-4} \leq P < 10^{-3}$ 。共鳴線が崩壊していない領域では遷移をしない確率が高い、崩壊した共鳴線に横断的な運動は高い確率で離れた領域を結んでおり、共鳴線が崩壊した領域は遷移のハブとなっていると言える。少なくとも二種類、四箇所の領域はハブと見なせる。

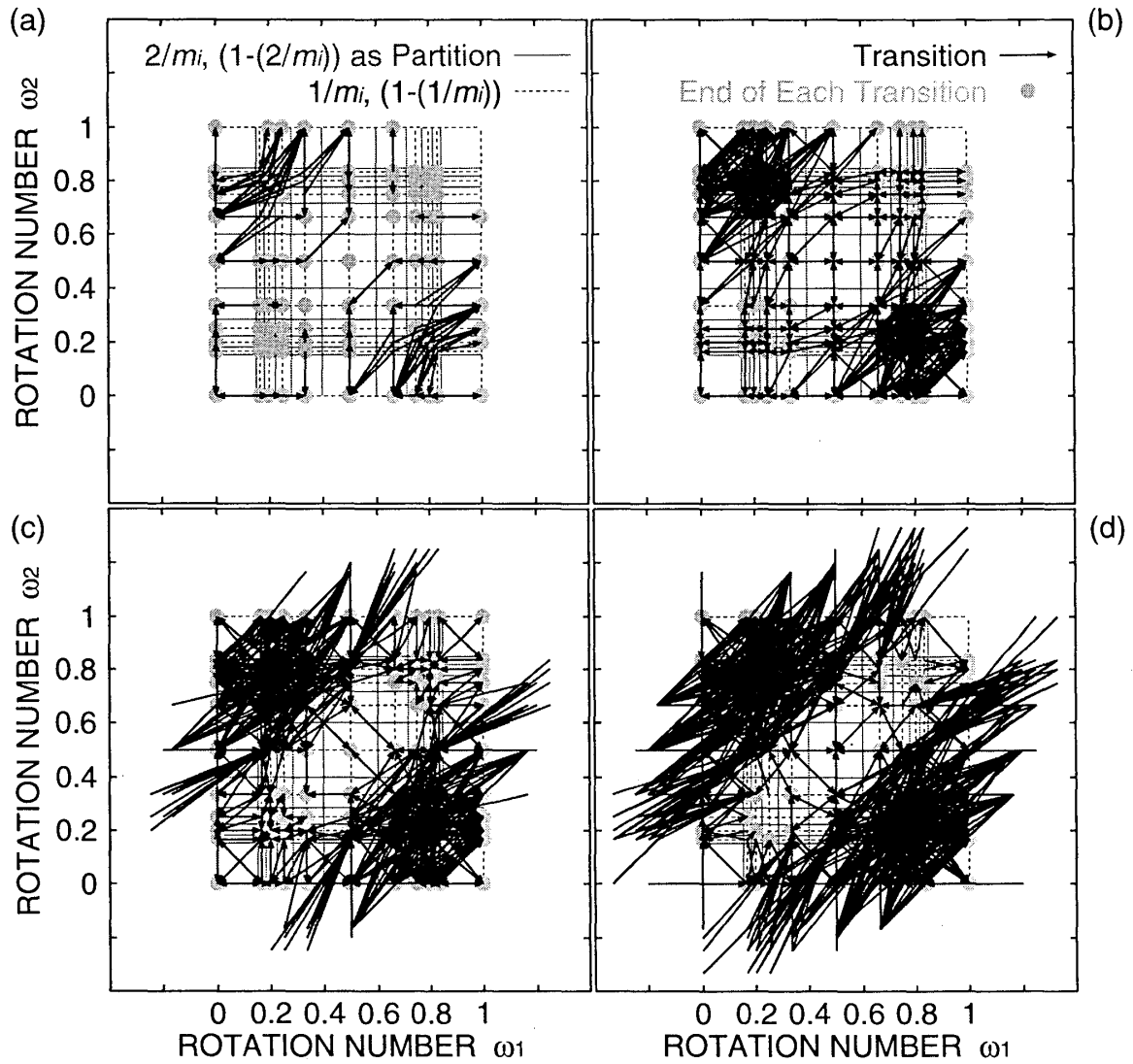


図 21: 遷移確率 P ごとに表した遷移の様子。素子の非線形パラメータ $K = 0.5$ 、結合強度 $b = 0.100$ 。遷移確率は、(a) : $P \geq 10^{-1}$ 、(b) : $10^{-2} \leq P < 10^{-1}$ 、(c) : $10^{-3} \leq P < 10^{-2}$ 、(d) : $10^{-4} \leq P < 10^{-3}$ 。図 21 の結合強度が $b = 0.040$ の場合に比べると、各ハブはより多くの離れた領域への遷移が可能になっており、ハブ同士も融合して、より大きなハブを形成している。

みる。

ここではスタート地点として領域 $\{1/3, 1/3\}$ 、ゴール地点として領域 $\{2/3, 2/3\}$ をとる。これらの領域はそれぞれ黄金比 $1 - (\sqrt{5} - 1)/2$ および $(\sqrt{5} - 1)/2$ を含む領域であり、前節の遷移確率を調べた結果からもわかる通り、周波数空間内で他の場所からもっとも到達しにくい領域だと考えられるからである。

素子の非線形パラメータを $K = 0.5$ 、結合強度を $b = 0.040$ としてスタート地点に初期値を 64 サンプル用意する。そのとき最初にゴールしたサンプルの遷移ダイアグラムが図 22 である。対応する周波数空間および、相空間の表示は図 17(a)(b) の通りである。

この場合、 $1/3 \leq \omega_1 < 1/2$ かつ $1/2 \leq \omega_2 < 2/3$ の領域にあるハブを経由して結合由来の共鳴線に横断的に移動することによりスムーズな遷移をしている。試行した 64 サンプル中、最初にゴールする 3 サンプルは $1/3 \leq \omega_1 < 1/2$ かつ $1/2 \leq \omega_2 < 2/3$ の領域にあるハブを通るか、 $1/2 \leq \omega_1 < 2/3$ かつ $1/3 \leq \omega_2 < 1/2$ の領域のハブを通るかの違いこそあれ、系の対称性を考えるとほぼ同様の遷移経路をとっている。

つまり、前節で見たようなハブを経由することにより、実際に速い遷移を実現していることがわかった。これはすなわち、共鳴線に横断的な運動が共鳴線に沿った運動に比べて速い運動であるという確信を与えるものである。

64 サンプル中、4 番目にゴールするサンプルの遷移ダイアグラムは図 23 の通りである。64 サンプル中、8 番目までにゴールするサンプルを全て調べた結果、領域 $\{2/3, 2/3\}$ に到達するには、領域 $\{1/2, 2/3\}$ もしくは領域 $\{2/3, 1/2\}$ のどちらかから直接到達しなければならないことがわかっていて、図 23 のサンプルは、 $\omega_1 \geq 2/3$ かつ $\omega_2 < 1/3$ の領域と、 $\omega_1 < 1/3$ かつ $\omega_2 \geq 2/3$ の領域にある大きなハブを経由しており、どこへでも速やかに遷移できる可能性を感じさせる。しかし、ゴール地点である領域 $\{2/3, 2/3\}$ に到達するには、 $1/3 \leq \omega_1 < 1/2$ かつ $1/2 \leq \omega_2 < 2/3$ の領域や、 $1/2 \leq \omega_1 < 2/3$ かつ $1/3 \leq \omega_2 < 1/2$ の領域にある小さなハブを通るのではなければ、遷移確率から考えて絶望的なほど長い時間がかかってしまうことになる。つまり、大きなハブにつながるノードからは、小さなハブを一度は経由しなければ、速くゴール地点にたどり着くことはできない。図 23 のサンプルは、大きなハブに回り道をしている分、小さなハブしか経由していないサンプルよりもゴールするのに多くのステップ数を費している。

遷移の向きと大きさを表す矢印をよく見るとわかるように、局所的な移動速度は、大きなハブの方が小さなハブよりも大きい。しかし、肝心のハブ間をつなぐ経路の多くが共鳴線によって塞がれており、共鳴に沿った運動を避ける抜け道を探す時間の分、遷移に時間がかかっている。

では、素子の非線形パラメータが $K = 0.5$ 、結合強度が $b = 0.100$ の場合はどうであろうか。 $b = 0.040$ の場合に便宜的に小さなハブ、大きなハブと呼んだハブが、 $b = 0.100$ の場合は融合して、より大きなハブを形成すると前節で述べた。そこでは、形成されたより大きなハブが、本節で考えているような速く遷移するための経路として採用されることが予想される。

試行した 64 サンプル中、最初にゴールしたサンプルの遷移ダイアグラムが図 24 である。対応する周波数空間および、相空間の局所リアプノフ指数による表示は図 17(e)(f) の通りである。

予想通り、 $\omega_1 \geq 2/3$ かつ $\omega_2 < 1/3$ の領域や、 $\omega_1 < 1/3$ かつ $\omega_2 \geq 2/3$ の領域にまで成長したハブを経由して速やかな遷移を実現している。

ゴールまでのステップ数を比較すると、結合強度が $b = 0.040$ の場合は、64 サンプル中最初にゴールする 8 サンプルが $18072 \times 10^3 \sim 143268 \times 10^3$ ステップでゴールするのに対して、 $b = 0.100$ の場合は $1416 \times 10^3 \sim 3056 \times 10^3$ ステップでゴールしている。 $b = 0.100$ の場合は $b = 0.040$ の場合に比較して、ハブが融合して一つになっている分、無駄なハブを経由して迷ったりすることがなく、有効な効果のみを使ってより自由に動けるので遷移が速いと見ることができる。

$b = 0.100$ の場合に、64 サンプル中最初にゴールする 8 サンプルのダイアグラムを全て見たところ、全て図 24 とほとんど同等のダイアグラムが得られた。これだけ多くのノードと結合した

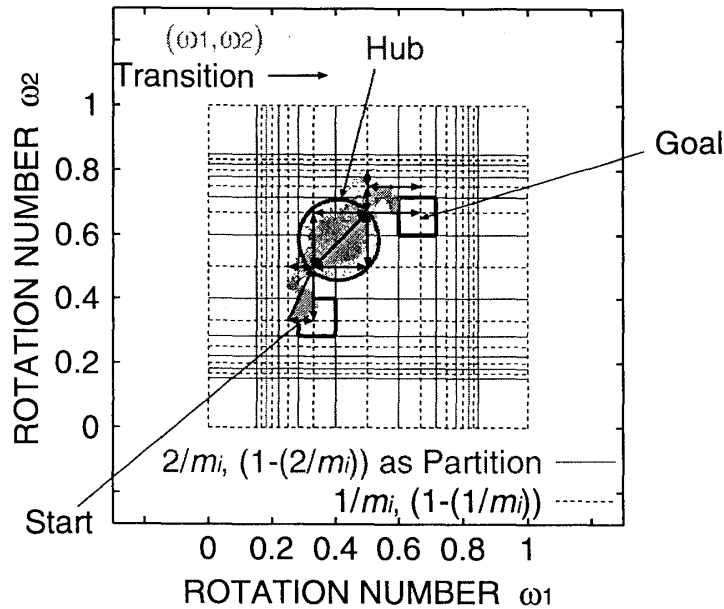


図 22: 遷移ダイアグラム。素子の非線形パラメータ $K = 0.5$ 、結合強度 $b = 0.040$ 。ゴールまで 18702×10^3 ステップ。ランダムに初期値をとった 64 サンプルの内、最初にゴールしたサンプル。この場合 $1/3 \leq \omega_1 < 1/2$ かつ $1/2 \leq \omega_2 < 2/3$ の領域にある小さなハブを通して速やかに遷移している。

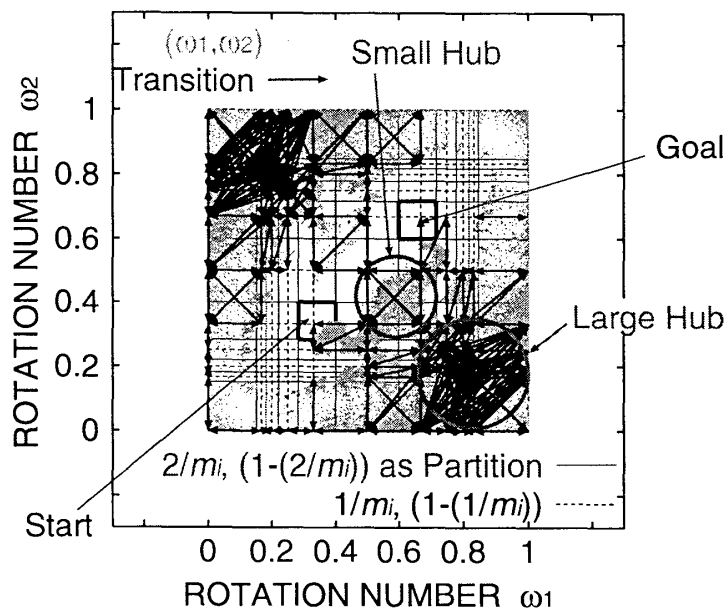


図 23: 遷移ダイアグラム。素子の非線形パラメータ $K = 0.5$ 、結合強度 $b = 0.040$ 。ゴールまで 73598×10^3 ステップ。ランダムに初期値をとった 64 サンプルの内、4 番目にゴールしたサンプル。 $\omega_1 \geq 2/3$ かつ $\omega_2 < 1/3$ の領域と、 $1/2 \leq \omega_1 < 2/3$ かつ $1/3 \leq \omega_2 < 1/2$ の領域にあるゴールとつながっていない大きなハブを無駄に経由したことにより、遷移に時間がかかっている。

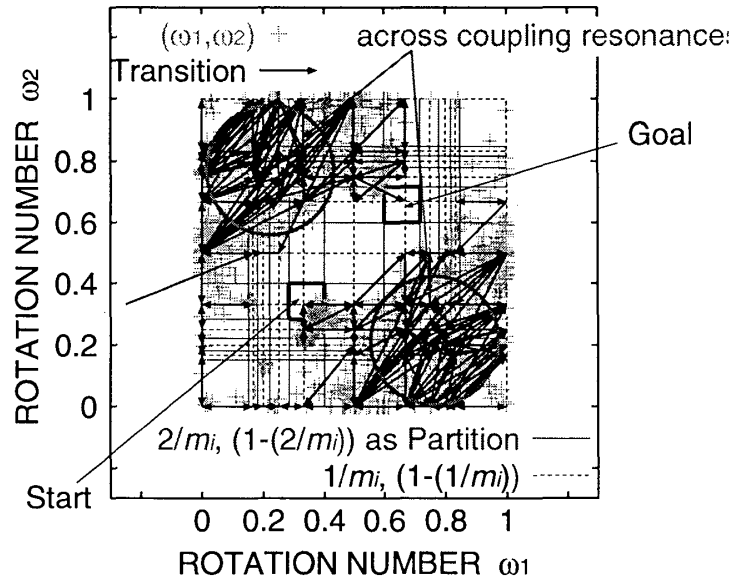


図 24: 遷移ダイアグラム。素子の非線形パラメータ $K = 0.5$ 、結合強度 $b = 0.100$ 。ゴールまで 1416×10^3 ステップ。ランダムに初期値をとった 64 サンプルの内、最初にゴールしたサンプル。融合して成長したハブを経由して速やかに遷移している。他のサンプルも図 23 の場合と異なり、無駄なハブを経由することによって遷移に時間がかかることはないで、安定して速やかに遷移する。

ハブが存在するならば、どこに遷移するにも一度はそのハブを通ることが期待されるし、また、そのことにより、様々な領域に安定して速く遷移することができるのである。

5.6 ハブ同士の融合

では結合強度が $b = 0.040$ の場合と $b = 0.100$ の場合の振舞いの違いは、特に、今までみたようなハブの融合／非融合は、パラメータに依存して連続的に変わるものなのか、それとも不連続に性質を変えるパラメータが存在するのであろうか。それぞれのパラメータに対応する図 17 の (a)(b) と (e)(f) の違いを、遷移ダイアグラムの違いを踏まえて比べると、 $1/2 \leq \omega_1 < 2/3$ の領域で $\omega_2 = 1/3$ の共鳴線が見出されるかどうかは異なっていることが分かる (対称性によって他の 3 本の共鳴線についても同様。)

この共鳴線の崩壊が、あるパラメータで突然起きるのなら、定性的振舞いがそのパラメータを境にしてドラスティックに変わるはずである。Standard Map のレゾナンスオーバーラップによる KAM トーラスの崩壊を考えるなら、そのようなパラメータがあるかどうかは一応疑ってみるべきである。

その問いに答えるため、まずは拡散係数 D を結合強度 b に対してプロットし、明らかな微分不能点があるかどうかを調べた。拡散係数 D は

$$D \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{(p_i(T) - p_i(0))^2}{T} \right\rangle \quad (20)$$

で定義した。ここで、 $\langle \cdot \rangle$ はサンプル平均を意味しており、ここでは各パラメータに対して 160 サンプルを計算している。得られた拡散係数 D の結合強度 b に対する依存性は図 25 の通りであり、誤差の範囲を越えるような明確なカスプは見られなかった。

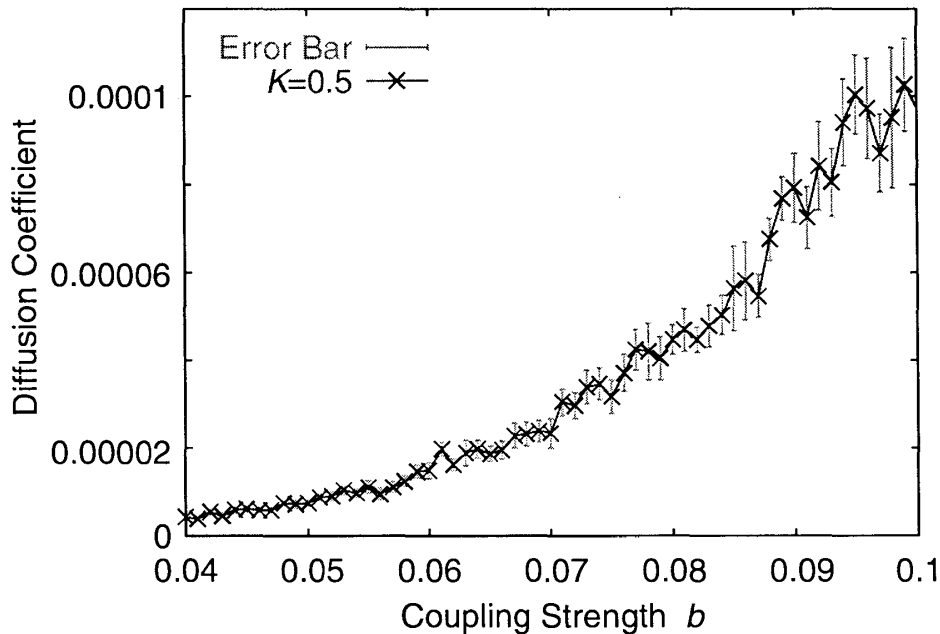


図 25: 拡散係数の結合強度 b 依存性。両端の、結合強度 $b = 0.040$ の場合と $b = 0.100$ 場合は定性的振舞いが異なる。間に定性的性質をドラスティックに変えるようなパラメータは見当たらない。160 サンプル。

そのことを中間のパラメータに対して周波数空間と相空間の断面の不安定性を可視化することによって確認したのが図 17(c)(d) である。パラメータは $b = 0.070$ であり $b = 0.040$ と $b = 0.100$ の間にある。図 17(c) の周波数空間と (d) の相空間を対応づけながら見てみると $(1/3 \leq \omega_1 \leq 1/2)$ かつ $(1/2 \leq \omega_2 \leq 2/3)$ の区間の不安定領域と $\omega_1 = 0$ かつ $\omega_2 = 1$ の周辺の不安定領域が、結合強度の増大と共に $\omega_1 + \omega_2 = 0$ に沿う形で徐々に合体していくことがわかる。とくに中段右図を見るとその様子がよく分かる。

つまり、共鳴線が崩壊するときは、一自由度系のトーラスの崩壊と異なり、その崩壊の程度はパラメータに連続的に依存していることがわかる。

5.7 速い遷移は実現されるか

これまで、崩壊した共鳴線に横断的な速い運動を利用することによって、2つの領域間の速やかな遷移が実現されることを見てきた。では、周波数空間全域で共鳴線の崩壊の程度が小さいときに、もっとも速やかな遷移を実現するのはどのような運動であろうか。例えば、素子の非線形パラメータが $K = 0.9$ 、結合力が $b = 0.002$ の場合、周波数空間は図 5(a) の通りであり、共鳴線の網の目、アーノルドウェブがはっきりと見られる。

崩壊していない共鳴線が遷移の障壁として振る舞うのであれば、大域的な拡散は共鳴線上の運動、アーノルド拡散に律速されると考えるのが自然である。このような状況のときでも共鳴線が崩壊した領域を縫った速い遷移が実現され得るのかどうか、ここで調べたいことである。

5.5 節と同じように、スタート地点として領域 $\{1/3, 1/3\}$ 、ゴール地点として領域 $\{2/3, 2/3\}$ をとり、ランダムに用意した 64 サンプル中、最初にゴールしたサンプルについて遷移ダイアグラムを求める。その結果が、図 26 である。

5.5 節と同様に、遷移ダイアグラムでは粗視化された領域間の遷移を矢印で表してある。しか

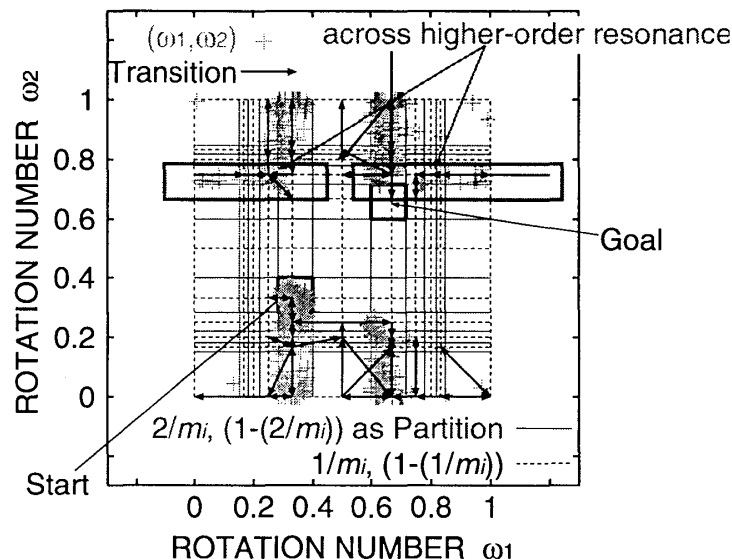


図 26: 遷移ダイアグラム。素子の非線形パラメータ $K = 0.9$ 、結合強度 $b = 0.002$ 。ゴールまで 2187×10^3 ステップ。ランダムに初期値をとった 64 サンプルの内、最初にゴールしたサンプル。低次の共鳴線上を運動するのではなく、例えば、 $\omega_2 = 5/7$ と $\omega_2 = 3/4$ の間など高次の共鳴領域を運動している。

し、今回の遷移からは一見異方性が確認されず、また、共鳴線は縦横に格子状に走っているので、運動が共鳴線に沿っているのか横断的なかわからない。

そこで、遷移ダイアグラムに重ね書きした、局所周波数そのものに注目してみる。すると、運動は低次の共鳴線上を共鳴線に沿って運動しているのではなく、 $\omega_i = 2/n$ もしくは $\omega_i = 1 - (2/n)$ の共鳴線と $\omega_i = 1/n$ もしくは $\omega_i = 1 - (1/n)$ の共鳴線の間の狭い領域を巧みに通って運動しているのがわかる。

3.5.1 節で図 7 を観察している時、素子の非線形パラメータ K の増大とともに、 $\omega_i = 0$ である四辺から内側に向かって分布がぼやけて広がっていくことを指摘した。周波数空間の頻度分布の広がり方から、この領域は密集した高次の共鳴領域と $\omega_i = 0$ の共鳴領域が重なって、共鳴線が崩壊している領域だと考えるのが最も妥当である。このことは図 12 で見られたように、高次の共鳴線ほど滞在時間分布が早く落ちることとコンシステントである。図 26 に見られる遷移は、この領域を通して運動している結果と見ることができる。

もちろん、第 4 章で共鳴線上の滞在時間分布を測ることができたことからわかるように、共鳴線上での共鳴線に沿った運動は起こり得る。しかし、そのような運動は、速い遷移に寄与するものではなく、速い遷移はもっぱら共鳴線が崩壊した領域を使って運動する場合に起きると考えられる。

アーノルドウェブを見て素朴に考えると、ウェブ上を運動するような気もしてくる。しかし、共鳴に沿った運動を過大評価する必然性はなく、いかにして共鳴線が崩壊した領域のみを通して運動の経路を構成するかが速い遷移を実現するためには重要なのであろう。実際に、崩壊していない共鳴線上ではなく、崩壊した高次の共鳴領域を裏道として通る速やかな移動が実現され得るのだ。

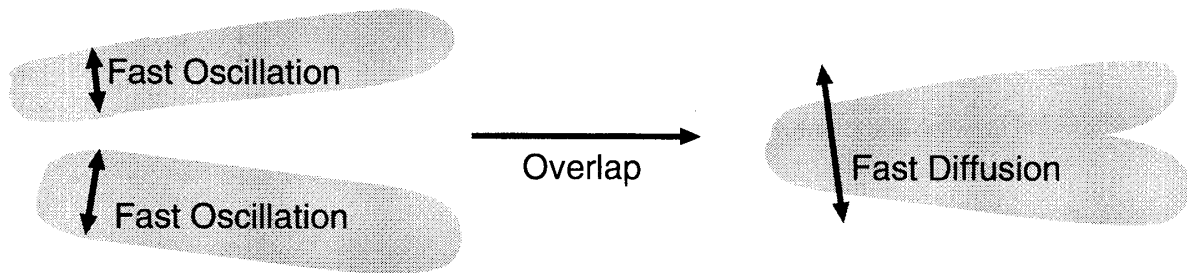


図 27: 共鳴線領域が重なり合っ共鳴線が崩壊する様子。もとの共鳴線に横断的な振動が速いならば、崩壊した共鳴線に横断的な運動が速いことは説明できる。

5.8 まとめと議論

遷移ダイアグラムを描いて動力学を調べたところ、共鳴領域同士が重なって共鳴線が崩壊した領域では、崩壊した共鳴線に横断的な速い運動が起こることがわかった。一方、共鳴線が崩壊していない領域では運動は遅く、その領域は遷移に対して障壁となっている。共鳴線が崩壊した領域は、多くの領域と直接的な遷移が可能であり、遷移に対してハブとして振舞う。そして、共鳴線の崩壊が進むとハブ同士も融合していく。

共鳴領域同士が重なって大域的な運動が可能になること自体は、低自由度系でも見られる現象である。しかし、低自由度系では共鳴に関わる自由度あるいは外力は常に普遍であり、共鳴線の交差はあり得ない。しかし、多自由度系の場合は、関わる自由度が異なる共鳴線同士が交差し合い、その点で共鳴領域同士が重なるということが起こる。その場合、接合点自体の疎密や接合点付近の共鳴領域の体積などを考慮することにより初めて大域的な運動の性質を理解することができる。そこに低自由度系と多自由度系の違いがある。

また、周波数空間全体で低次の共鳴線が多く観察される場合でも共鳴線が崩壊した領域を絶妙に通る速い運動は起こり得ることを見た。アーノルド拡散の研究と称して多自由度系の拡散係数を計算する場合、その理論的取扱いは、運動は共鳴線に沿った一次元の運動であることがまず仮定される [CV93, CV97, WLL90, WLL94, LA98, CL99]。大域的な拡散を律速するのは遅い運動であると考えるのは確かに自然なことである。しかし、どのようなパラメータ領域でそのような仮定が正しいかは明らかではない。本節で得た結果を前節で得た結果と合わせて考えると、速い運動に寄与するのは崩壊した共鳴領域を通る二次元運動である。これらの寄与が、遅い一次元運動の律速効果を大きく上回るような状況でこそ、現実的な、つまり、非天文学的な時間スケールで輸送や緩和が期待できるのではないだろうか。このような系に対しては、拡散を律速するアーノルド拡散が起きる領域としてのアーノルドウェブという見方ではなく、大域的な拡散に寄与するハブ領域の形成条件としてのアーノルドウェブという見方こそ重要なのだと思われる。これらの点については、次節で大域的な拡散係数を求めながら、さらに論じることとする。

崩壊した共鳴線に横断的な運動はなぜ速いのかを考えてみる。共鳴線が崩壊していない場合、運動は相空間の共鳴領域での共鳴線に横断的な振動と、共鳴線に沿った運動に分けられる。局所回転数を求めるとは、前者の運動を平均化してしまい、運動の舞台を周波数空間に移すことであった。共鳴が崩壊するとき、一旦見えなくなった共鳴線に横断的な振動が顕在化すると考えてはどうだろうか。振動の速度が、共鳴線に沿った運動の速度に比べて大きいなら、共鳴線が崩壊した後の速度の差も説明することが出来る。その様子を模式的に表したのが、図 27 である。

しかし、残念なことに入り組んだ多自由度系で、共鳴線に横断的な振動の速度を求める術は現

在のところ持っていない。振動の速度を求めるためには、振動の各周波数と共鳴領域の体積の両方を知らないといけない。これらを求めるのは極めて困難な仕事のように思える。

今まで、一貫して、崩壊していない共鳴線が遷移の障壁となるという言い方をしてきた。これを従来の相空間の構造物を使った言い方で表してみることにする。共鳴線が崩壊していないとは、共鳴領域が構造物に囲まれているため、他の領域との間の流束が小さいということである。つまり、「共鳴線が崩壊していないということ＝そこに構造物があるということ」、であり、その構造物が遷移の障壁となっているという見方もできる。

われわれには、この言い方は周りくどすぎるように感じられる。そもそも、相空間の構造物そのものを狙って探すのは困難なのである。それよりも、あらかじめ他の共鳴領域と交差して、接合点で他の共鳴条件を満たす共鳴領域への遷移を可能にする「穴」の開いている共鳴領域が、穴の拡大とともに崩壊し、大域的な運動を可能にするという描像の方が、見通しがよいと思われる。

6 大域的拡散

6.1 導入

前節までで、崩壊していない共鳴線は一次元運動しか許さないで運動の障壁となり、崩壊した共鳴線に横断的な運動が速い遷移を導き出すことがわかった。そして、低次の共鳴線が集中した領域が輸送のハブとして振る舞うという知見を得た。本節では、それらの共鳴の構造から導き出される振舞いが、拡散係数とどう関係づけられるかを調べる。

拡散係数 D は

$$D \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{(p_i(T) - p_i(0))^2}{T} \right\rangle \quad (21)$$

で表される。ここで、 $\langle \cdot \rangle$ はサンプル平均を意味している。

6.2 拡散係数の収束の様子

まず、拡散係数の時間変化、特に収束性をみるために、有限時間拡散係数を

$$D(T) \equiv \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{(p_i((m+1)T) - p_i(mT))^2}{T} \quad (22)$$

で定義して測定する。ただしこれまでと同様に $i = 1, 2$ は素子のインデックス、 T は測定の単位時間の長さ、 M は一本の時系列を単位時間 T の時系列に分割したときの個数である。

時間依存した拡散係数を様々な結合強度に対してプロットしたのが図 28 である。この図は $T = 1 \times 10^{10}$ ステップの時系列一本から計算した。 $T = 1 \times 10^9$ あたりで揺らいでいるのは、長時間のものほどサンプル数が少なくなり、十分な統計平均が取れていないからである。

図 28 を見ればわかる通り、短時間では異常拡散をしているが、長時間では拡散係数は一定値をとり通常拡散に移行していることがわかる。

これは Froeschlé Map が運動量方向に周期 2π の対称性を持っていることに関係しており、一周期分を単位セルとして考えると、セルの飛び移りによって相関を失うことによって通常拡散に移行していることが想像できる [KK89]。このことは、運動量 p_i の標準偏差がセルのサイズの半分である π になる辺り、つまり拡散係数 D が $\sqrt{Dt} = \pi$ を満たす辺りで収束しているかどうかを調べればわかる。図 28 に $D = \pi^2/t$ をプロットしたところ、確かにそのように収束している。

つまり、この系の拡散係数はセルから出ていく速さを表していることがわかる。このように Froeschlé Map は拡散係数が長時間で定義できることがわかったので、今後は長時間で収束した拡散係数を研究の対象とする。

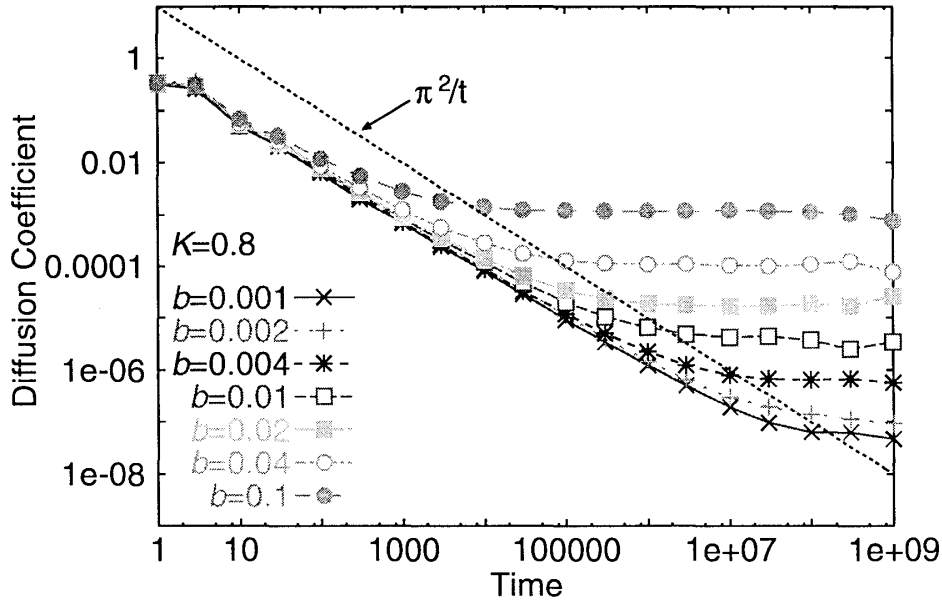


図 28: 拡散係数の時間依存性。 $T = 1 \times 10^{10}$ ステップの時系列をそれぞれの時間単位に分割してから計算し、平均を取ってある。素子の非線形パラメータ $K = 0.8$ 。結合強度 $b = 0.001, 0.002, 0.004, 0.010, 0.020, 0.040, 0.100$ の場合を重ね書きしてある。 $D = \pi^2/t$ 、つまり分散が π になる辺りで収束していることから、拡散係数は周期的なセルから異なるセルに移る速さを表していることがわかる。

6.3 拡散係数の結合強度依存性

まず、拡散の大まかな性質をつかむために、拡散係数が結合強度 b に依存してどのように変化するかを調べた。収束をモニターしながら求めた拡散係数の結合強度依存性を様々な非線形パラメータ K に対して求めた結果が図 29 である。

カオスが十分強く、 q_i が時間的にランダムであるという仮定の下では、拡散係数 D を求めることが出来る。1 ステップの運動量の変化分を

$$\Delta p_i(n) \equiv p_i(n+1) - p_i(n) \quad (23)$$

としたとき、 $(\Delta p_i(n))^2$ の素子と時間とサンプルに対する平均が D になる。 $(\Delta p_1(n))^2$ の時間平均 $\overline{(\Delta p_1)^2}$ は

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta p_1)^2} &= \overline{(p_1(n+1) - p_1(n))^2} \\ &= \overline{(K_1 \sin(q_1(n)) + b \sin(q_1(n) + q_2(n)))^2} \\ &= \overline{K_1^2 \sin^2(q_1(n)) + 2K_1 b \sin(q_1(n)) \sin(q_1(n) + q_2(n)) + b^2 \sin^2(q_1(n) + q_2(n))} \\ &= \frac{K_1^2}{2} + \frac{b^2}{2} \end{aligned} \quad (24)$$

となるので、結局、 $D = (K^2 + b^2)/2$ が得られる。

図 29 では $K = 0.5$ および $K = 4.0$ に対して $D = (K^2 + b^2)/2$ をプロットしている。素子の非線形性自体が強く、ランダムな振る舞いをしている $K = 4.0$ の場合は全域で、 $K = 0.5$ でも結合強度 b が大きいところで、 $D = (K^2 + b^2)/2$ によく合っているのがわかる。

しかし、 $K = 0.5$ の b があまり大きくない領域では D は $D = (K^2 + b^2)/2$ から明らかにはずれ、 b の値に対してべき的な依存が見られる。また、 $K = 0.5$ の場合と同様に、 $K \leq 0.9$ の b が

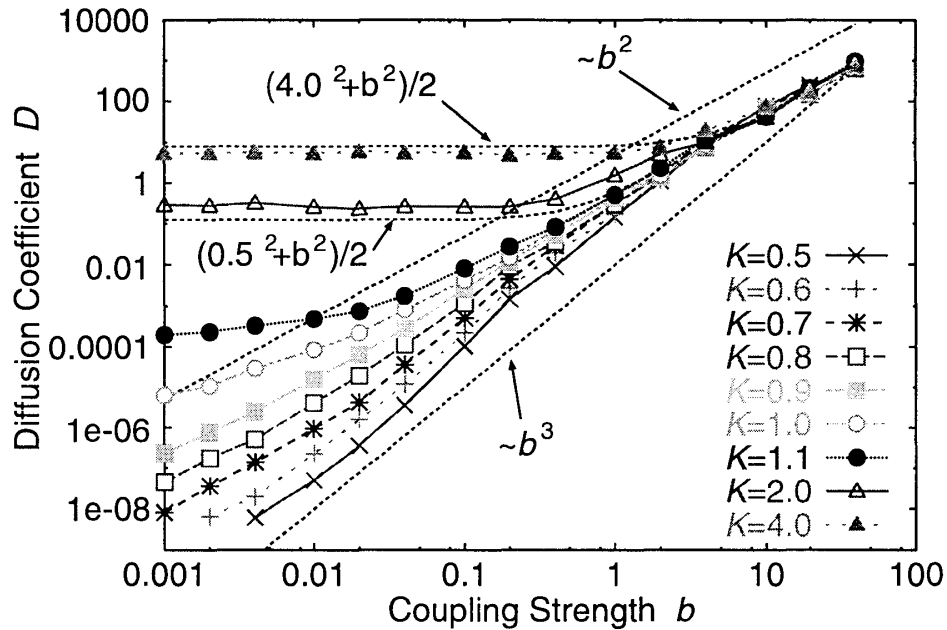


図 29: 拡散係数 D の結合強度 b 依存性。複数の素子の非線形パラメータ K に対するデータをプロットしてある。 $K \geq 1.0$ では D は $b \rightarrow 0$ で一定値に落ち着きそうである。 $K \leq 0.9$ では D は b に対してべき依存している。

あまり大きくない領域では、拡散係数 D は b に対して $D \sim b^\alpha$ とべき的に依存しているのが見られる。

図 29 では $K \geq 1.0$ のパラメータで D は $b \rightarrow 0$ で一定値に落ち着くことが期待できる。このことは Froeschlé Map が $b = 0$ で独立な二つの Standard Map となることを考えるとよくわかる。Standard Map は $K > K_c \simeq 0.9716$ では KAM トーラスが破れて大域的拡散が制限されることがないので、有限の値の拡散係数 D を持つ。よって、Froeschlé Map で $b \rightarrow 0$ としたときも $K > K_c \simeq 0.9716$ の場合は各素子から決まる有限の D に漸近することが期待できる。

一方、 $K \leq K_c \simeq 0.9716$ のとき、Standard Map では KAM トーラスによって大域的拡散が制限されるので $D = 0$ であり、Froeschlé Map で $b \rightarrow 0$ としたときも $K \leq K_c \simeq 0.9716$ ならば $D \rightarrow 0$ となることが期待できる。この場合に拡散係数 D が結合強度 b にべき的に依存していることが図 29 の $K \leq 0.9$ のグラフからわかる。

ならば、素子の非線形強度 K を変えたときにべき指数 α はどのように変化するのであろうか。図 29 を見るとわかるように、 K が小さいほどべき指数 α の値は大きくなっている。

拡散係数 D が結合強度 b にべき依存する場合に、べき指数 α を素子の非線形パラメータ K に対してプロットしたのが図 30 である。図 30 からは α は K に比例して減少するという結果が得られるが、そのことを理論的に説明することが現状では出来ていない。しかし、 K が小さいほど b の寄与が大きいと点は直観によく合っている。

6.4 拡散の異方性

前節では拡散係数 D が結合強度 b に対してべき的に依存することを見た。では、実際に運動量はどのように拡散しているのだろうか。

第 5 節で共鳴線に沿った運動よりも崩壊した共鳴線に横断的な運動の方が速いことを見た。な

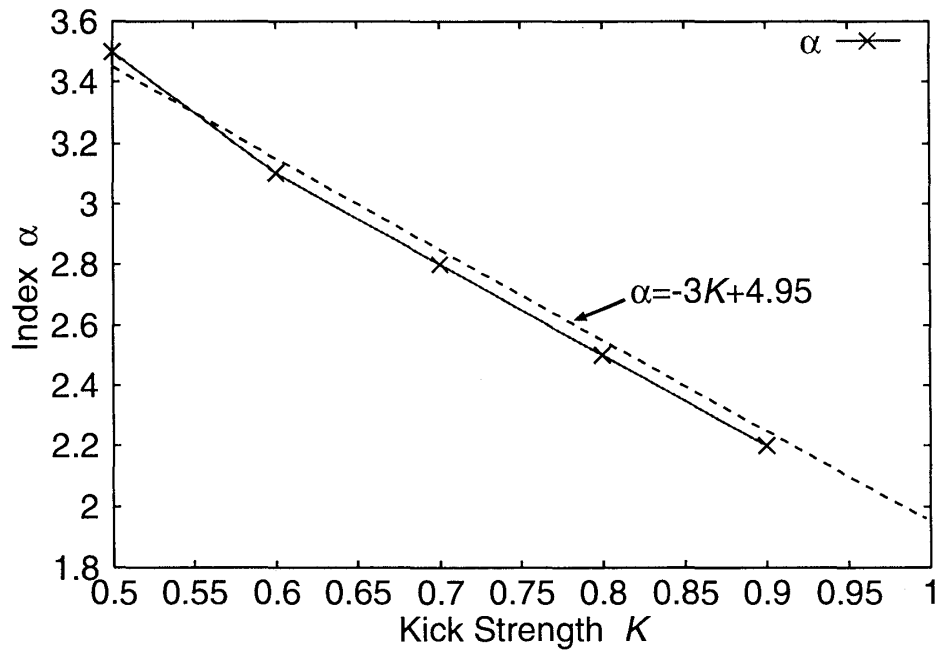


図 30: 指数 α の素子の非線形パラメータ K 依存性。 α は拡散係数 D に対して $D \sim b^\alpha$ となる指数。 K に対して比例して減少している。

らば、大域的な拡散に重要な寄与をするのは、共鳴線に横断的な運動のはずである。

素子の非線形パラメータが $K = 0.5$ 、結合強度が $b = 0.100$ の場合の大域的な拡散の様子が図 31 である。大域的拡散は、崩壊した共鳴線に横断的な速い運動が寄与することにより、異方性をもっていることが見て取れる。

では、共鳴に横断的な運動が大域的な拡散にどの程度寄与しているのかを見るために、運動量空間に軸を設定して、その軸方向の拡散係数を測定してみることにする。共鳴線の崩壊が最も顕著に見られるのは結合方向の $\omega_1 + \omega_2 = 0$ の共鳴線である。また、例えば $2\omega_1 + \omega_2 = 0$ と $\omega_1 + 2\omega_2 = 0$ などの結合方向の高次の共鳴線に横断的な運動は、平均すると対称性から $\omega_1 + \omega_2 = 0$ の共鳴線に横断的な運動である。よって、 $\omega_1 + \omega_2 = 0$ の共鳴線をメインに考えていくことにする。つまり、軸として、もともとの変数 p_i に従うものも含めて

$$\begin{aligned}
 p_2 &= 0 && (p_1 \text{ 軸方向}) \\
 p_1 &= 0 && (p_2 \text{ 軸方向}) \\
 p_1 - p_2 &= 0 && (\text{崩壊した共鳴線に横断的な方向}) \\
 p_1 + p_2 &= 0 && (\text{崩壊した共鳴線に沿った方向})
 \end{aligned} \tag{25}$$

を考えればよい。

素子の非線形パラメータ $K = 0.8$ のときの拡散係数をそれぞれの軸に対して求めたものが、図 32 である。 $(p_2 = 0)$ 方向、 $(p_1 = 0)$ 方向の拡散係数は、対称性から予想される通り全方向の拡散係数 D に一致する。図 32 を見ると明らかに、崩壊した共鳴線に横断的な $(p_1 - p_2 = 0)$ 軸方向の拡散係数が、崩壊した共鳴線に沿った $(p_1 + p_2 = 0)$ 軸方向の拡散係数を上まわっていることがわかる。このことから、大域的な拡散に寄与するのは、崩壊した共鳴線に横断的な方向の運動であることが確認された。

崩壊した共鳴線に沿った $(p_1 + p_2 = 0)$ 軸方向の拡散係数は、結合強度 b が大きい領域では一定値に落ち着いている。このことを理解するために、Froeschlé Map の変数を、 $p_1 - q_1$ と $p_2 - q_2$ か

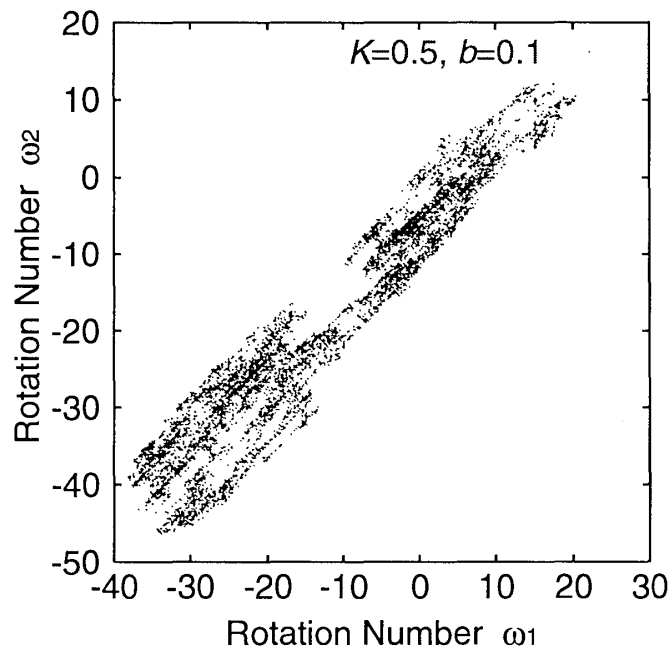


図 31: 局所回転数の周波数空間での重ね書き。素子の非線形パラメータ $K = 0.5$ 、結合強度 $b = 0.100$ 。 1×10^9 ステップ。50 点に 1 点をプロット。大域的な拡散は結合による共鳴線に横断的な方向で起きていることがわかる。

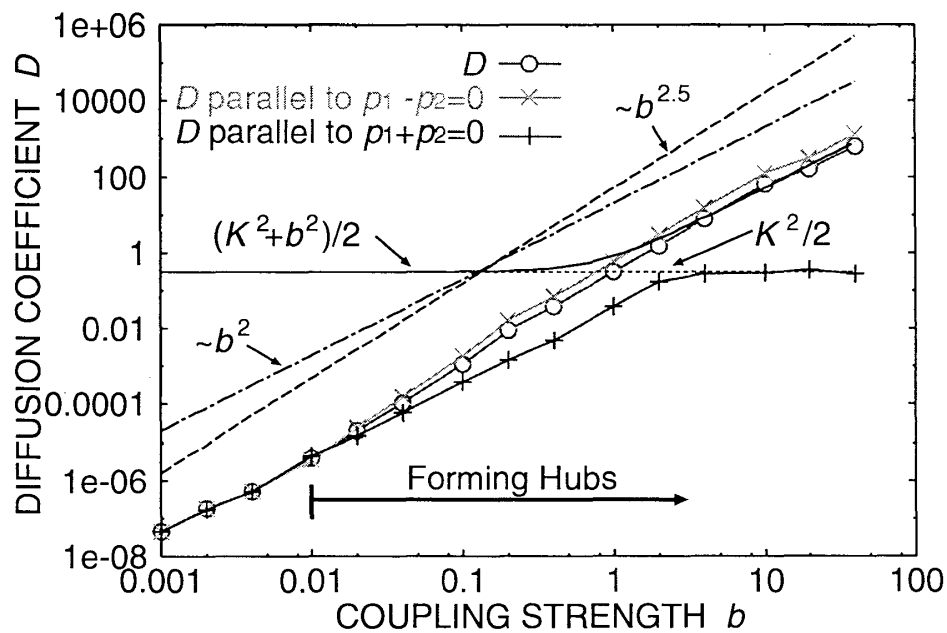


図 32: 軸に沿った拡散係数の結合強度 b 依存性。素子の非線形パラメータ $K = 0.8$ 。崩壊した共鳴線に横断的な方向には拡散係数が大きい。崩壊した共鳴線に沿った方向の拡散係数は $b \rightarrow$ 大で一定値に落ち着く。 $b \rightarrow$ 大ではそれぞれランダムな q_1 、 q_2 を仮定した近似が成立している。

ら、崩壊した共鳴線に横断的な P_1 - Q_1 と崩壊した共鳴線に沿った P_2 - Q_2 に、変換してみればよい。変数変換は、

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{2}}, P_2 \equiv \frac{-p_1 + p_2}{\sqrt{2}} \\ Q_1 &\equiv \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}}, Q_2 \equiv \frac{-q_1 + q_2}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (26)$$

であり、その結果、Froeschlé Map は

$$\begin{cases} P_1(n+1) = P_1(n) + \sqrt{2}K \sin\left(\frac{Q_1(n)}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{Q_2(n)}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}b \sin(\sqrt{2}Q_1(n)) \\ Q_1(n+1) = Q_1(n) + P_1(n+1) \\ P_2(n+1) = P_2(n) + \sqrt{2}K \cos\left(\frac{Q_1(n)}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{Q_2(n)}{\sqrt{2}}\right) \\ Q_2(n+1) = Q_2(n) + P_2(n+1) \end{cases} \quad (27)$$

となる。 Q_1, Q_2 の周期境界は q_1, q_2 の周期境界から直接的に考えると、場合分けがあつて繁雑になるが、今は必要ないので考えない。崩壊した共鳴線に沿った方向の運動量 P_2 には、結合力 b に依った項がなく、結合の効果は位相 Q_1 を通してのみ効いてくる。よって、カオスが強くなって q_1, q_2 が、つまり Q_1, Q_2 がランダムになると、実効的に結合強度の大きさには依らなくなり、拡散係数が一定値をとることがわかる。

前節と同様に、 q_1, q_2 が、つまり Q_1, Q_2 がランダムである仮定して計算すると、それぞれの拡散係数は

$$\begin{aligned} D_{p_1} &= \frac{K^2 + b^2}{2} \quad (p_1 \text{ 軸方向}) \\ D_{p_2} &= \frac{K^2 + b^2}{2} \quad (p_2 \text{ 軸方向}) \\ D_{P_1} &= \frac{K^2}{2} + b^2 \quad (\text{崩壊した共鳴線に横断的な方向}) \\ D_{P_2} &= \frac{K^2}{2} \quad (\text{崩壊した共鳴線に沿った方向}) \end{aligned} \quad (28)$$

となる。これらの値は、図 32 に見られるように、結合強度 b の大きいところでは良く一致している。

6.5 拡散係数のべき的振舞いはどのように説明されるか

では、拡散係数が結合強度にべき的に依存するとき、ミクロレベルでは何が起きているのだろうか。

近可積分系では、摂動論による見積りで、共鳴に沿った運動の拡散係数は摂動に対して $D \sim \exp(-1/b^\gamma)$ (γ は定数) という引き延ばされた指数関数になることが知られており [Chi79, Loc90, LN92]、 $D \sim b^\alpha$ (α は定数) となるべき依存は導出されない。

大自由度ハミルトン力学系の数値実験によって見出された拡散係数の摂動に対するべき的な依存は [KK89, KK90]、従来、共鳴に沿ったアーノルド拡散の加速によって説明されてきた [CV93, CV97]。また、大自由度ハミルトン力学系の拡散の研究の多くは、共鳴に沿ったアーノルド拡散の速度を局所的に求めた後、それぞれの拡散係数に対応する運動が相空間内でどれくらいの割合を占めるか見積もることによって平均化し、大域的な拡散の速度を求めるという処方をとっている [LL92, WLL90, WLL94, LA98, CL99]。

しかし、これまで見てきたように、本研究で結合強度 b に拡散係数 D がべき的に依存する振舞いを見せているパラメータ領域は、共鳴に横断的な速い運動が重要性を持つ領域である¹³。ならば、少なくともいま扱っている系に関してはとくに図 32 で $b > 0.010$ あたりから拡散係数の異方性が顕著になっていることと図 9 の明らかにわかるハブ領域の形成が対応していることを考えると、共鳴に沿ったアーノルド拡散に単純に律速されるものとして大域的な拡散を片付けてしまうことは甚だ疑わしい。

従来の方法では、大域的拡散を律速する拡散は、共鳴線に沿った一次元の運動として起きることが前提となっている。そのことは stochastic pump model に典型的に表われている [Chi79, LL92, WLL90]。Stochastic pump model とは、状態がある共鳴線に沿って動く、ということ完全を仮定し、別の自由度の寄与で正味どれくらい動くかを計算しようとするものである。例えば Froeschlé Map の場合は、 p_2 の共鳴に沿って p_1 が動くとは仮定せず p_2 の時間発展を p_1 と独立に解き、その寄与を含めて p_1 の時間発展を計算するという処方をとる。つまり、もとの写像

$$\begin{cases} p_1(n+1) = p_1(n) + K_1 \sin(q_1(n)) + b \sin(q_1(n) + q_2(n)) \\ q_1(n+1) = q_1(n) + p_1(n+1) \\ p_2(n+1) = p_2(n) + K_2 \sin(q_2(n)) + b \sin(q_1(n) + q_2(n)) \\ q_2(n+1) = q_2(n) + p_2(n+1) \end{cases} \pmod{2\pi} \quad (29)$$

を解く代わりに

$$\begin{cases} p_1(n+1) = p_1(n) + K_1 \sin(q_1(n)) + b \sin(q_1(n) + q_2(n)) \\ q_1(n+1) = q_1(n) + p_1(n+1) \\ p_2(n+1) = p_2(n) + K_2 \sin(q_2(n)) \\ q_2(n+1) = q_2(n) + p_2(n+1) \end{cases} \pmod{2\pi} \quad (30)$$

を解いて p_1 の拡散係数を見積もることになる。 p_2 の運動の 1 周期あたりの p_1 の時間変化は、Melnikov-Arnold 積分で評価する [LL92, WLL90]。当然のことながら、このアプローチは運動量空間あるいは周波数空間で二次元の運動をしている場合には完全に破綻する。

また、Chirikov と Vecheslavov は fast Arnold diffusion と称し、拡散係数が、摂動項に対して、自由度に依らないべき指数で、べき的に依存するような状況を考えた [CV93, CV97]。この導出は、共鳴に沿った一次元の運動を仮定し、共鳴に関与していない自由度と外力によって生じた独立な周波数の効果を、共鳴に沿った運動の速度が最大になるように取り込むことによってなされている。

これらの研究では大前提として、共鳴線に沿った運動による律速だけで大域的な拡散係数が見積もれるということが仮定されている。

図 29 で拡散係数が摂動項に対してべき依存を示しているパラメータ領域では、共鳴線はすでに重なって崩壊していることが周波数空間を表す図 8 や図 9 を見ることによってわかる。そして、そのときは図 24 からわかるように、大域的な拡散に寄与するのは崩壊した共鳴線に横断的な速い運動である。そして、図 32 を見ると拡散係数には異方性があることが確認され、その異方性が拡散を加速させている状況を考慮すると、共鳴に沿った運動が拡散を律速していることのみにより拡散係数を見積もるのは無理がある。

つまり、共鳴線が崩壊していない領域の存在は拡散の減速に寄与をするが、律速はしていないというのが自然な解釈である。系が完全にランダムな状態を基準として考えると、共鳴線が崩壊

¹³[CV93, CV97] は共鳴に沿った運動が他自由度からのモジュレーションにより加速されることを論じているが、理論的取扱いは裏腹に、その中で数値的例として挙げられる [KK89, KK90] の拡散は、崩壊した共鳴線に横断的な拡散の可能性が高い。

せずに運動の障壁として振る舞う領域がある割合で相空間に存在していて、それらが拡散を減速する効果が、拡散係数の結合強度 b に対するべき依存を支配していると考えられる。

言い替えると、結合強度 b を増していくとハブとなる領域が増加するとき、その増え方が拡散係数に結合強度に対するべき依存を与えるような増え方をしているとの予想が立つ。その予想を確かめるためには、どのようにしてハブが生じ、また、どのようにそれらが融合するかを調べなければならない。その上で拡散係数の摂動項に対するべき依存を理解すべきであろう。

6.6 まとめと議論

結合強度を $b = 0$ から増大させていくと、共鳴線が崩壊する。そのとき、崩壊した共鳴線に横断的な速い運動が可能となることで大域的拡散が異方的になることを見た。変数変換した写像からは明白な大域的拡散の異方性は、ミクロ的には崩壊した共鳴線に横断的な方向の運動が速いことと等価であった。

また、拡散係数が結合強度に対して $D \sim b^\alpha$ (α は定数) とべき依存することがわかった。従来は摂動に対して拡散係数がべき的に振舞うような系に対しては、共鳴に沿った遅い運動が加速することによって生じると説明されている。しかし、本研究では共鳴線に横断的な運動が支配的なパラメータ領域で拡散係数がべき的に振舞っていることが見出されている。このことから、べき的な振舞いを理解するには、共鳴に沿った運動が拡散を律速していることを前提とするよりもむしろ、共鳴に横断的な運動をする領域が全系の中でどのくらいの割合を占めているのかを考えることが大事なのではないかとの示唆を得た。

7 まとめ、議論、展望、課題

7.1 まとめ

本論文でなされたことを要約すると以下ようになる。

まず、局所回転数を用いることによりアーノルドウェブを、実際の時系列の動力学から周波数空間に可視化した。

次に、周波数空間上で可視化された共鳴線の構造が素子の結合強度の変化によってドラスティックに変化していく様相を見た。この変化の観察により、共鳴領域が重なって共鳴線が崩壊している部分と共鳴線が残っている部分の性質の違いが重要であり、その崩壊の程度に着目すべしとの知見を得た。

その知見を踏まえ、共鳴線の滞在時間分布を調べ、共鳴線が崩壊しているか否かでそれぞれ異なるべき指数の分布を得た。そして、それぞれのべき指数を一次元および二次元のブラウン運動で解釈できることを述べた。そのことにより、共鳴線上の運動は、共鳴領域が重なることによって、一次元から二次元的に変化することを確認した。

続いて、周波数空間上で粗視化した領域に対して遷移ダイアグラムを描くことによって、崩壊した共鳴線に横断的に速い運動が起こることを見出した。そこでは、共鳴線が崩壊していない領域では運動が遅く、遷移の障壁となるため、速い遷移は共鳴線が崩壊した領域を有効に使っていることがわかった。そして、結合に由来する低次の共鳴線を巻き込んで崩壊した領域は、遠くの領域とも直接的に遷移が許されるハブとなっており、ハブを有効に使うことで効率的な遷移が行われるという描像を得た。

また、共鳴線の図から素朴に思い付くような低次の共鳴線に沿っての運動に律速されることなく、崩壊した高次の共鳴領域を通る速やかな移動がなされることを見た。

最後に、拡散係数を測定し、拡散係数が結合項に対してべき依存するパラメータ領域では拡散

は異方的であることを見た。それは、崩壊した共鳴線に横断的な速い運動が、大域的な拡散に主として寄与するからであった。結合強度を大きくしていく過程では、ハブ同士が融合し、そのことがさらに拡散速度を増加させていくことを見た。拡散係数の結合項へのべき依存は、共鳴線に沿った遅い運動の律速速度から見積もられるのではなく、共鳴に横断的な速い運動を許す相空間の領域が、全系に対して占める割合を考慮することによって導き出されるのではないかと予想を得た。

7.2 議論

本研究は共鳴の構造に着目したいがために、共鳴をよりよく抜き出すような手法でなされた。多自由度系で相空間の構造物を探すのは、非常に困難である。それに対して、本研究は共鳴の構造の変化を調べるだけで、系のヘテロ性や、拡散が加速されていくさまを捉えることに成功している。

以上の研究の結果、カオスがある程度強い場合の多自由度のハミルトン力学系では、近可積分系アナロジーや、低次元系アナロジーからくる、系は「規則的な運動をする構造物+非線形共鳴によって生じた不安定なカオス領域」であるという描像よりも、「カオスではあるが局所的には回転数が特定できるという意味で『安定』な共鳴+重なり合って『不安定』化した共鳴」という描像の方が見通しがよいという知見が得られたということになる。つまり、それぞれ性質の異なるカオス領域が準安定に存在しているか否かを見ることが重要だと考えられる。

7.3 大自由度系への展望

大自由度系では、空間の次元が増えるとともに交差する共鳴線も密となり、共鳴線の崩壊の仕方や程度も様々なものがあると予想することができる。

そのとき、共鳴の滞在時間分布はどのようなものになるのだろうか。例えば、本研究の単純な延長上として Standard Map を結合項 $b\sin(\sum_{k=1}^3 q_k(n))$ で 3 個結合した場合を考えてみよう。予備計算によると、三次元の周波数空間内でも低次の共鳴線の滞在時間分布が $t^{-3/2}$ になることが見られている。このことから三次元空間でも共鳴に沿っての運動は一次元であると予想できる。しかし、共鳴線の崩壊の仕方については、そう簡単には予想できない。共鳴が崩壊して三次元運動をする様は想像がつく。しかし、運動が二次元となるような崩壊の仕方は安定して存在するのだろうか。それとも共鳴線が崩壊したら、最初から三次元に広がってしまうのだろうか。この問題に答えることは、周波数空間にどの程度の非一様性のバリエーションが許されるかどうかの試金石になるだろう。

共鳴線が崩壊し、ハブが形成され、さらにそれらが融合して大域的な運動が可能になっていく、という描像に対し、大きな変更を迫るような要素は現在のところ想像できない。次元が上がる程、様々な角度の共鳴線が密に交差するようになる。よって、単一ハブにつながるノードも増えるであろうし、ハブと見なせる領域の数自体の増え方も増すことが予想される。大自由度で速やかに拡散するというのは、そのような機構を通してなのであろう。

この描像によると、自由度の増加によるハブ領域の増加とノードの増加が、空間の次元自体の増加を上まわっていることを確認すれば、自由度が大きい程、相空間を大域的に運動することが説明できそうである。

本研究を延長して Standard Map を素子とする N 自由度の写像を考える場合には、いくつかの候補がある。さきに述べた予備計算をした例のように、自明な結合共鳴の共鳴線を一次元に保

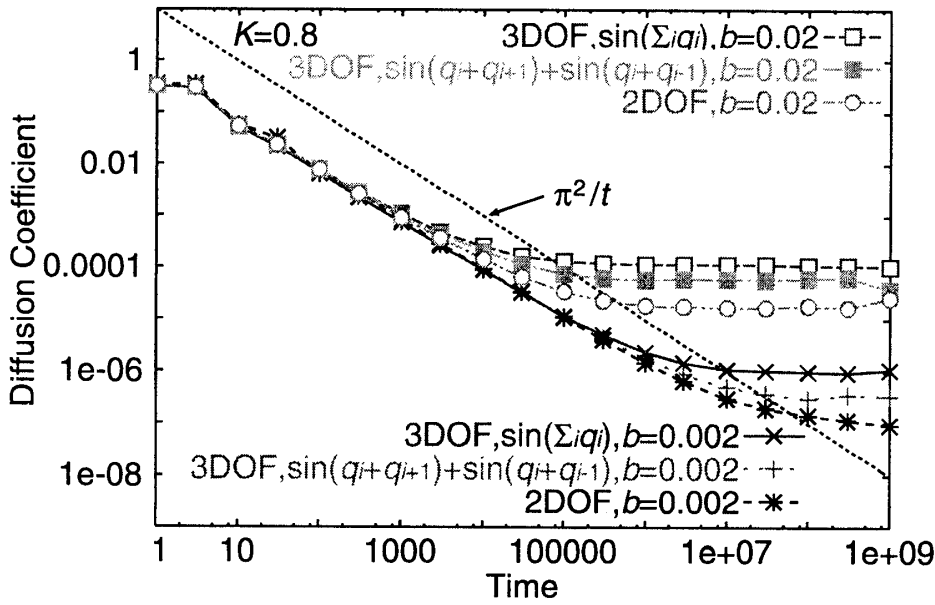


図 33: 拡散係数の時間依存性。素子の非線形パラメータ $K = 0.8$ 。結合強度 $b = 0.002, 0.020$ 。結合項を $b \sin(\sum_{k=1}^3 q_k(n))$ 、および $b/\sqrt{2} \{\sin(q_i(n) + q_{i+1}(n)) + \sin(q_i(n) + q_{i-1}(n))\}$ とした 3 自由度系と 2 自由度系について計算した。

ちたいなら、通常の 3 自由度 Froeschlé Map[Fro73]

$$\begin{cases} p_i(n+1) = p_i(n) + K \sin(q_i(n)) + b \sin(\sum_{k=1}^3 q_k(n)) \\ q_i(n+1) = q_i(n) + p_i(n+1) \end{cases} \pmod{2\pi} \quad (31)$$

を用いることが考えられる。激力を受けた振子が複数個結合したものとして示量性を保ちたいならば、

$$\begin{cases} p_i(n+1) = p_i(n) + K \sin(q_i(n)) + \frac{b}{\sqrt{2}} \{\sin(q_i(n) + q_{i+1}(n)) + \sin(q_i(n) + q_{i-1}(n))\} \\ q_i(n+1) = q_i(n) + p_i(n+1) \end{cases} \pmod{2\pi} \quad (32)$$

を用いるのが妥当である。ただし、適宜 $i+3 = i$ の条件を使いインデックスを 1, 2, 3 に読みかえる。また、 q_1, q_2, q_3 がランダムな極限で両者の拡散係数が一致するように、結合強度を $1/\sqrt{2}$ でスケールしてある。これらと 2 自由度の Froeschlé Map のそれぞれについて、図 28 と同様に拡散係数を時間に依存して求め、比較したのが図 33 である。最大限共鳴した条件 $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + M = 0$ (ただし m_i は全て 0 でない整数) を得やすい 3 自由度の Froeschlé Map が最も拡散係数が大きく、3 自由度の結合 Standard Map、2 自由度の Froeschlé Map と続く。

$T = 1 \times 10^9$ あたりで揺らいでいるのは、図 28 と同様、長時間のものほどサンプル数が少なくなって、十分な統計平均が取れていないからである。この結果は 3 自由度系の方が 2 自由度系に比べて拡散が速いということもさることながら、3 自由度系同士で比較した場合でも、最大に共鳴していた方が拡散が速いことを示している。このことは、大自由度で、かつ共鳴している自由度が大きいほど速やかに拡散するという傾向を予期させる。

つまり、本研究の結果とこの予備的な計算結果を踏まえると、系が自由度が大きくなり共鳴に関わる自由度が増えれば増えるほど、共鳴線が崩壊してハブとして振舞う領域が増え、速やかな拡散を誘導することが推測できる。そして、そのことにより全相空間体積の増加率よりも不安定領域の増加率の方が大きくなるので、図 33 のような結果が出てくるのではないのだろうか。

つながったストカスティック領域のなかでも、共鳴線がほとんど崩壊していない領域と大きく崩壊した領域があり、それらの間を移り変わることは、状態の時間変化に直結していると考えられる。そのような見地に立つと、[KK92, KK94]で見いだされたハミルトン力学系におけるクラスター状態および各々の素子同士がある距離を保ち続ける状態という、二つの秩序状態は、共鳴線の崩壊の程度が弱い領域に対応し、ランダム状態は共鳴線の崩壊の程度が強い領域に対応していると推測される。そして、時間的に秩序状態とランダム状態を移り変わるカオスの遍歴は、それらの間を移り変わっていく過程と見ることはできないだろうか。

リアプノフ指数は自由度が大きいほど収束性が高いということが知られている [FMV91]。そのことは自由度が大きい程、相空間を大域的に様に運動することが可能であることを示している。このようなことも、ハブ描像で明確に説明できるのではないだろうか。

また、リアプノフスペクトルは強カオスで直線形 [LPRV87]、中間カオスで下に凸の形状 [Yam98] をもつことが知られている。これらのリアプノフ指数の形とは、全空間の内、どれぐらいの割合で共鳴線が崩壊しているかを反映しているような気がしてならない。これらのこともハブのでき方や、融合の仕方を考えることによって説明できるのではないだろうか。

このように、ハブ描像をさらに高次元の系に拡張することにより、様々な現象を統一的に解釈できる可能性が感じられる。

7.4 散逸系への展望

本研究では結局のところ、共鳴線の安定性を調べ、あるパラメータに対して共鳴線が崩壊しているか否かによって系の性質がどのように変わるかを調べていたことになる。これは、散逸力学系のアトラクターの安定性を調べることに平行に考えられるように思える。

このように考えると、散逸力学系に典型的に見られる「周波数ロックしたアトラクターと、それらの重なりによって生じたカオス」と「崩壊していない共鳴線と、それらの重なりによって生じた大域的なカオス」の対応もスムーズにつくと思われる。

第5節で遷移ダイアグラムを描いたとき、易動度の差は明確に見えても、遷移は確率的で具体的な方向性をもっている様には見えなかった。しかし、散逸力学系なら遷移に方向性が見え、領域の入口として振舞う場所と出口として振舞う場所に違いが見いだされても不思議ではない。そのようにして、本研究の延長上で、散逸がいかに動力学に影響を与え、いかに履歴や選択性を生み出すのかを理解するための、一つの知見が得られることが期待される。

7.5 量子系への展望

Standard Map を量子力学で扱うと、対応する古典系が強カオスであるようなパラメータ領域でも、波動関数の局在現象が見られることはよく知られている [CCIF79]。この状況は2自由度系では激変し、再び、拡散や、条件付きながらも混合性といったカオス的な性質を見せることになる [ATI88, TAI89]。

われわれが扱ったのは後者の系の古典力学バージョンに等価である。本研究では、多自由度系の共鳴の構造が作り出す非一様性な動力学を調べた。ならば、その非一様性が量子力学で記述される世界で表われ得るのか、表われるならどんな形で表われるのかを問うのは自然なことである。

量子系ではトンネル現象が起きるので、古典系はであるような動的な障壁が古典系ほど有効に効かないかも知れない。しかし、古典系で共鳴線が崩壊しておらず遅い運動しか許さない場合は量子系ではトンネルが運動の主要部分になり、また、古典系で共鳴線が崩壊している場合は波動関数もより自由に速やかに広がっていくということが想像できる。このような想像が的外れかど

うかは調べてみる価値があると思われる。

7.6 今後の課題

本研究はまだ未完である。よって、延長上にすぐになされるべきことを以下に挙げておく。

まず、さらに自由度を大きくしていった時、系の振舞いがどのように変わるかを調べるということである。これは、7.3 で挙げた予備計算を推し進め、予想の真偽を確かめるということにあたる。

また、異なるモデルでも確かめてみなければならない。[KK89, KK90] で見出された大自由度系の拡散係数の結合力に対するべき依存は、Froeschlé Map の非線形パラメータを $K = 0$ とした素子を、最近接もしくは大域的に結合したモデルに対してである。これらのモデルで見いだされたべき依存性が、一体どういうメカニズムによるものなのかということが本研究の延長で調べられるはずである。

次に、運動が周波数空間内で一次元的であったり、二次元的であったりするときに相空間の運動の振舞いの違いはどのように特徴づけられるかを調べるということがある。これはリアプノフベクトルの振舞いで特徴づけられるかも知れない。

本研究では同じ素子を複数結合した場合しか扱わなかった。しかし、ヘテロな素子を結合するとなりが起こるのかも調べなければならない。予備計算によると、異なる非線形パラメータをもつ素子を結合したところ、 ω_1 方向と ω_2 方向で高次の共鳴線への頻度分布が異なっていた。そのような状況下で結合の強さを変えていった場合、共鳴線の崩壊の仕方は系のヘテロ性を強く反映すると予想される。それが周波数空間上の易動度にどのように影響するかを確かめてみる必要がある。

また、結合項を非対称にすることにより主要な寄与をする結合共鳴を違うものとした場合、系の性質はどのように変わるのか。そのことを調べることにより、ハブの存在条件/位置に対しても定量的なことが言えるようになると考えられる。

第5章で遷移を考えた時、周波数空間の領域によって易動度に差があることは言えたが、少なくとも調べた範囲では切れ味の良い方向性のある遷移は見出せなかった。これは保存量のある可逆な力学系を扱っているのだから当然といえば当然である。ならば散逸が入ると振舞いはどのように変わるのかを調べるのは興味深い問題である。そのとき、ハミルトン力学系の共鳴条件は、まったく性質の異なる散逸力学系のロッキング状態を表すことになり、この違いをどのように統一的に扱うかを考えなければならない。この研究は例えば、本研究で用いた Standard Map を用いた各素子に摩擦を加えていくことで実現される。摩擦を加えた極限では、散逸力学系の基本的モデルである Circle Map を素子として結合した系と等価になり、同一のパラメータ空間上で散逸が動力学に及ぼす効果を考察できることになる。これは、最小の多自由度系である3つの結合した回転子を、2自由度の写像で表して、さらに、力学系のクラス分けを越えて、統一的に扱おうということである。

また、調べている系と同じハミルトニアンで記述される量子系の振舞いがどのようなものであるのかは、やはり興味深い。現在重視している周波数空間とヒルベルト空間での力学をどのように対応付けて扱うかは全く自明ではないが、波動関数の時間発展の様子は共鳴線の構造を反映したのものになるのか、あるいは全く関係づけられないのかは調べてみる価値がある。そのようにして得られた知見は現実的な化学反応系を考える上でも有用なものとなるであろう。

謝辞

指導教官でもある金子邦彦氏に感謝します。高塚和夫氏、佐々真一氏、池上高志氏、藤本仰一氏、粟津暁紀氏、高木拓明氏、富樫祐一氏、石原秀至氏、森田英俊氏、菅原武志氏、古澤力氏、佐藤勝彦氏、金子研構成員、金子研 OB 諸氏、金子研関係者、立川正志氏、藤崎弘士氏、堀田浩司氏、佐々研構成員、池上研構成員、高塚研構成員、染田研構成員、駒場 16 号館の全ての人々に感謝します。

参考文献

- [Arn64] V. I. Arnold. Instability of dynamical systems with several degrees of freedom. *Sov. Math. Dokl.*, Vol. 5, pp. 581–585, 1964.
- [ATI88] S. Adachi, M. Toda, and K. Ikeda. Quantum-classical correspondence in many-dimensional quantum chaos. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 61, pp. 659–661, 1988.
- [BK84] D. Bensimon and L. P. Kadanoff. Extended chaos and disappearance of KAM trajectories. *Physica D*, Vol. 13, pp. 82–89, 1984.
- [CCIF79] G. Casati, B. V. Chirikov, F. M. Izraelev, and J. Ford. Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation. In *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*, pp. 334–352. Springer, 1979.
- [Chi79] B. V. Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Phys. Rep.*, Vol. 52, pp. 263–379, 1979.
- [CL99] G. Corso and A. J. Lichtenberg. Streaminglike diffusion in the low-dimensional stochastic pump model. *Phys. Rev. E*, Vol. 59, pp. 6652–6657, 1999.
- [CV93] B. V. Chirikov and V. V. Vecheslavov. Theory of fast Arnold diffusion in many-frequency systems. *J. Stat. Phys.*, Vol. 71, pp. 243–258, 1993.
- [CV97] B. V. Chirikov and V. V. Vecheslavov. Arnold diffusion in large systems. *JETP*, Vol. 85, pp. 616–624, 1997.
- [Dav85] M. J. Davis. Bottlenecks to intramolecular energy transfer and the calculation of relaxation rates. *J. Chem. Phys.*, Vol. 83, pp. 1016–1985, 1985.
- [DG86] M. J. Davis and S. K. Gray. Unimolecular reactions and phase space bottlenecks. *J. Chem. Phys.*, Vol. 84, pp. 5389–5411, 1986.
- [FGL00] C. Froeschlé, M. Guzzo, and E. Lega. Graphical evolution of the Arnold web: From order to chaos. *Science*, Vol. 289, pp. 2108–2110, 2000.
- [FMV91] M. Falcioni, U. Marini Bettolo Marconi, and A. Vulpiani. Ergodic properties of high-dimensional symplectic maps. *Phys. Rev. A*, Vol. 44, pp. 2263–2270, 1991.
- [Fro71] C. Froeschlé. On the number of isolating integrals in systems with three degree of freedom. *Astrophys. SpaceSci.*, Vol. 14, pp. 110–117, 1971.

- [Fro72] C. Froeschlé. Numerical study of a four-dimensional mapping. *Astron. Astrophys.*, Vol. 16, pp. 172–189, 1972.
- [Fro73] C. Froeschlé. Numerical study of a four-dimensional mapping. ii. *Astron. Astrophys.*, Vol. 22, pp. 431–436, 1973.
- [GE91] R. E. Gillilan and G. S. Ezra. Transport and turnstiles in multidimensional Hamiltonian mappings for unimolecular fragmentation: Application to van der Waals predissociation. *J. Chem. Phys.*, Vol. 94, pp. 2648–2668, 1991.
- [Gre79] J. M. Greene. A method for determining a stochastic transition. *J. Math. Phys.*, Vol. 20, pp. 1183–1201, 1979.
- [KB85] K. Kaneko and R. J. Bagley. Arnold diffusion, ergodicity and intermittency in a coupled standard mapping. *Phys. Lett. A*, Vol. 110, pp. 435–440, 1985.
- [KK89] K. Kaneko and T. Konishi. Diffusion in Hamiltonian dynamical systems with many degrees of freedom. *Phys. Rev. A*, Vol. 40, pp. 6130–6133, 1989.
- [KK90] T. Konishi and K. Kaneko. Diffusion in Hamiltonian chaos and its size dependence. *J. Phys. A*, Vol. 23, pp. L715–L720, 1990.
- [KK92] T. Konishi and K. Kaneko. Clustered motion in symplectic coupled map systems. *J. Phys. A*, Vol. 25, pp. 6283–6296, 1992.
- [KK94] K. Kaneko and T. Konishi. Peeling the onion of order and chaos in a high-dimensional Hamiltonian dynamical systems. *Physica D*, Vol. 71, pp. 146–167, 1994.
- [Kon89] T. Konishi. Relaxation and diffusion in Hamiltonian systems with many degrees of freedom. In N. Saitô and Y. Aizawa, editors, *New Trends in Chaotic Dynamics of Hamiltonian Systems*, No. 98 in Prog. Theor. Phys. Suppl., pp. 19–35, 1989.
- [LA98] A. J. Lichtenberg and A. M. Aswani. Arnold diffusion in many weakly coupled mappings. *Phys. Rev. E*, Vol. 57, pp. 5325–5331, 1998.
- [Las90] J. Laskar. The chaotic motion of the solar system: A numerical estimate of the size of the chaotic zones. *Icarus*, Vol. 88, pp. 266–291, 1990.
- [Las93] J. Laskar. Frequency analysis for multi-dimensional systems. Global dynamics and diffusion. *Physica D*, Vol. 67, pp. 257–281, 1993.
- [LFC92] J. Laskar, C. Froeschlé, and A. Celletti. The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. application to the standard mapping. *Physica D*, Vol. 56, pp. 253–269, 1992.
- [LL92] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer-Verlag, second edition, 1992.
- [LN92] P. Lochak and A. I. Neishtadt. Estimates of stability time for nearly integrable systems with a quasiconvex Hamiltonian. *Chaos*, Vol. 2, pp. 495–499, 1992.
- [Loc90] P. Lochak. Effective speed of Arnold’s diffusion and small denominators. *Phys. Lett. A*, Vol. 143, pp. 39–42, 1990.

- [LPRV87] R. Livi, A. Politi, S. Ruffo, and A. Vulpiani. Liapunov exponents in high-dimensional symplectic dynamics. *J. Stat. Phys.*, Vol. 46, pp. 147–160, 1987.
- [MDE87] C. C. Martens, M. J. Davis, and G. S. Ezra. Local frequency analysis of chaotic motion in multidimensional systems: Energy transport and bottlenecks in planar OCS. *Chem. Phys. Lett.*, Vol. 142, pp. 519–528, 1987.
- [MMP84] R. S. MacKay, J. D. Meiss, and I. C. Percival. Transport in Hamiltonian systems. *Physica D*, Vol. 13, pp. 55–81, 1984.
- [Nek77] N. N. Nekhoroshev. An exponential estimate of the time of stability of nearly-integrable Hamiltonian systems. *Russ. Math. Surv.*, Vol. 32, No. 6, pp. 1–65, 1977.
- [TAI89] M. Toda, S. Adachi, and K. Ikeda. Dynamical aspects of quantum-classical correspondence in quantum chaos. In N. Saitô and Y. Aizawa, editors, *New Trends in Chaotic Dynamics of Hamiltonian Systems*, No. 98 in Prog. Theor. Phys. Suppl., pp. 323–375, 1989.
- [Ten82] J. Tennyson. Resonance transport in near-integrable systems with many degrees of freedom. *Physica D*, Vol. 5, pp. 123–135, 1982.
- [Tod95] M. Toda. Crisis in chaotic scattering of a highly excited van der Waals complex. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 74, pp. 2670–2673, 1995.
- [Tod00] 戸田幹人. 化学反応の動力学とカオス. 物性研究, Vol. 74, pp. 597–643, 2000.
- [Tod02] M. Toda. Dynamics of chemical reactions and chaos. *Adv. Chem. Phys.*, Vol. 123, pp. 153–198, 2002.
- [WLL90] B. P. Wood, A. J. Lichtenberg, and M. A. Lieberman. Arnold diffusion in weakly coupled standard maps. *Phys. Rev. A*, Vol. 42, pp. 5885–5893, 1990.
- [WLL94] B. P. Wood, A. J. Lichtenberg, and M. A. Lieberman. Arnold and Arnold-like diffusion in many dimensions. *Physica D*, Vol. 71, pp. 132–145, 1994.
- [Yam98] Y. Y. Yamaguchi. New universality of Lyapunov spectra in Hamiltonian systems. *J. Phys. A*, Vol. 31, pp. 195–207, 1998.